ESG 1987 Option générale Math I

I - Algèbre

Les deux parties du problème sont totalement indépendantes

Partie A

a et b étant deux réels, soit $M_{a,b}$ la matrice à 15 lignes et 15 colonnes telle que

$$\begin{array}{lll} \forall i \in \{1,..,15\}, & & a_{i,i} = a \\ \forall i,j \in \{1,..,15\}^2, & i \neq j & a_{i,j} = b \end{array}$$

et A l'ensemble des matrices $M_{a,b}$ quand a et b décrivent $\mathbb{R}$.

1. Montrer que A a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on donnera une base.

2. Montrer que A muni de l'addition et la multiplication des matrices est un anneau commutatif.

3. Déterminer suivant les valeurs de a et b le noyau de $M_{a,b}$ et le rang de $M_{a,b}$.

4. Soit $B = M_{1,2}$, déterminer B^{-1}.

Partie B

Etant donné un ensemble de r objets distincts ($r \in \mathbb{N}^\times$), on appelle mot de longueur n ($n \in \mathbb{N}^\times$), construit sur E, toute suite de n termes dont les éléments sont des éléments de E. (Si $E = \{a,b,c\}$, *bcba* est un "mot" de longueur 4)
On dit qu'un mot a la propriété P si et seulement si il est impossible de trouver trois termes consécutifs du mot qui soient identiques. (Si $E = \{a,b,c\}$, le mot *baaca* a la propriété P, le *cbbba* n'a pas la propriété P)
$A_{r,n}$ désigne l'ensemble des mots de longueur n ayant la propriété P sur un ensemble E de cardinal r.

- $a_{r,n}$ est le cardinal de $A_{r,n}$
- $a'_{r,n}$ est le nombre d'éléments de $A_{r,n}$ dont le premier élément est égal à un élément donné de E et dont le second terme, s'il existe est différent du premier.
- $a''_{r,n}$ est le nombre d'éléments de $A_{r,n}$ dont les deux premiers éléments sont égaux entre eux et égaux à un élément donné de E. (par convention, $a''_{r,1} = 0$)

1. Quel est le nombre de mots de longueur n que l'on peut construire sur un ensemble de cardinal r ?

2. Quel est le nombre de mots de longueur n, formés d'éléments tous distincts, que l'on peut construire sur un ensemble E de cardinal r ?

3. Déterminer $a_{1,1}, \quad a_{1,2}, \quad a_{1,3}, \quad a_{2,2}, \quad a_{2,3}, \quad a'_{1,2}, \quad a'_{2,2}, \quad a''_{2,2}, \quad a''_{2,3}, \quad a_{3,3}, \quad a'_{3,2}, \quad a''_{3,2}$

4. Exprimier $a_{r,1}, \quad a_{r,2}, \quad a'_{r,1}, \quad a'_{r,2}, \quad a''_{r,2}, \quad a''_{r,3}$ en fonction de r.

5. (a) Exprimer $a_{r,n}$ en fonction de $r, a'_{r,n}$ et $a''_{r,n}$.
   (b) Exprimer $a'_{r,n}$ en fonction de $r, a'_{r,n-1}$ et $a''_{r,n-1}$ ($n > 1$)
   (c) Exprimer $a''_{r,n}$ en fonction de $r, a'_{r,n-2}$ et $a''_{r,n-2}$ ($n > 2$).
   (d) En déduire $a_{r,n}$ en fonction de $r, a_{r,n-1}, a_{r,n-2}$ ($n > 2$)

6. On fixe dorénavant $r = 6$, on pose $u_n = a_{6,n}$.

   (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}\backslash\{1,2\}, \quad u_n = 5(u_{n-1} + u_{n-2})$.

   (b) Calculer u_1 et u_2.

   (c) Exprimer u_n en fonction de n.

7. On lance un dé et on désigne par X le numéro du lancer où, pour la première fois, on vient d'obtenir trois lancers consécutifs identiques.
(Par exemple, si on obtient successivement $2, 1, 3, 2, 2, 4, 4, 4, 1, 2, ..$ $X = 8$).

   (a) Calculer $P(X > 2)$.

   (b) Calculer $P(X > k)$ pour k entier > 2.

   (c) En déduire $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^{\times}\backslash\{1,2\}$.

II - Analyse

Les trois parties du problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers.
$\mathbb{Z}^-$ désigne l'ensemble des entiers strictement négatifs.
e est la base des logarithmes népériens $\ln e = 1$.
Dans tout le problème, x appartient à l'intervalle $]1, +\infty[$.
Pour n et k dans $\mathbb{Z}$, on pose $F_{n,k}(x) = \int_e^x t^n (\ln t)^k dt$.

Partie A

I. $n = -1$, $k \in \mathbb{Z}$, on pose $G_k(x) = \int_e^x \frac{(\ln t)^k}{t} dt$.

   1) Calculer $G_{-1}(x)$ en fonction de x.

   2) Calculer $G_k(x)$ en fonction de x et de k ($k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$)

   3) Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles $G_k(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

II. $k = 1$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$, $H_n(x) = F_{n,1}(x) = \int_e^x t^n (\ln t) dt$.

   1) Calculer $H_n(x)$ en fonction de x et de n.

   2) Etudier la limite de $H_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

III. $k \in \mathbb{N}^{\times}$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$, $F_{n,k}(x) = \int_e^x t^n (\ln t)^k dt$.

   1) Etablir une relation entre $F_{n,k}(x)$ et $F_{n,k-1}(x)$ ($k > 1$).
   Dire comment le calcul de $F_{n,k}(x)$ se ramène au calcul de $H_n(x)$.

   2) On suppose en outre ici $n < -1$.

      a. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{n+1} (\ln t)^{k+2} = 0$

      b. En déduire qu'il existe un réel $A \in]e, +\infty[$ tel que :

      $$\text{pour tout } t > A, \quad t^n (\ln t)^k \leqslant \frac{(\ln t)^{-2}}{t}$$

      c. Montrer que $F_{n,k}$ est une fonction croissante.

d. Déduire de b et c que $F_{n,k}(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

3) On suppose maintenant $n > -1$.

a. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t^{n+1}(\ln t)^k} = 0$

b. En déduire qu'il existe un réel $B \in]e, +\infty[$ tel que :

$$\text{pour tout } t > B, \quad \frac{1}{t} \leqslant t^n(\ln t)^k$$

c. Montrer que $F_{n,k}(x)$ diverge vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie B

I. $n = 0$, $k = -1$, $\quad \phi(x) = F_{0,-1}(x) = \int\limits_e^x \dfrac{dt}{\ln t}$

1) Montrer que ϕ est dérivable deux fois sur $]1, +\infty[$ et déterminer $\phi'(x)$ et $\phi''(x)$. En déduire le sens de variation de ϕ, la concavité et son graphe, l'équation de la tangente au point d'abscisse e.

2) Montrer que, pour t de $]1, +\infty[$, $\ln t < t - 1$.
En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} \phi(x)$
(on admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\phi(x)}{x} = 0$)

3) Calcul approché de $\phi(4)$

a. Tracer rapidement le graphe (C) de la fonction $x \mapsto \ln x$.
Soit A le point de (C) d'abscisse et B le point de (C) d'abscisse 4.

b. Déterminer les coordonnées de A et B.

c. Déterminer l'équation $y = f(x)$ de la tangente à (C) en A.

d. Déterminer l'équation $y = g(x)$ de la droite AB.

e. Montrer que, pour tout x de $[e, 4]$, $\quad g(x) \leqslant \ln x \leqslant f(x)$.
En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{\ln x}$ pour $x \in [e, 4]$ puis un encadrement de $\phi(4)$.

4) Tracer le graphe de ϕ en utilisant tous les résultats obtenus.

Partie C

I. $n = 0$, $k \in \mathbb{Z}^-$, $\quad I_k(x) = \int\limits_e^x \dfrac{dt}{(\ln t)^{-k}}$
Etablir une relation entre $I_k(x)$ et $I_{k+1}(x)$. $(k < -1)$.
Dire comment le calcul de $I_k(x)$ se ramène au calcul de $\phi(x)$

II. $k = -1$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$, $\quad J_n(x) = \int\limits_e^x \dfrac{t^n}{\ln t} dt$.
Exprimer $J_n(x)$ à l'aide de la fonction ϕ.
(on pourra effectuer le changement de variable $u = t^{n+1}$).

III. Calculer $\int\limits_e^x \dfrac{t}{(\ln t)^2} dt$ à l'aide de la fonction ϕ.

IV. Calculer $\int\limits_e^x \dfrac{t}{(4 + \ln t)^2} dt$ à l'aide de la fonction ϕ.