ESG 1987 Option générale Math II

Les parties I, II et III sont indépendantes

Toutes les probabilités calculées dans ce problème seront données sous forme de fractions irréductibles.

Les dés considérés sont cubiques et les faces numérotées de 1 à 6.
On considère un lot de 10 dés, dont 5 d'entre eux sont pipés et les autres équilibrés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 lorsqu'on le lance sera prise égale à $\dfrac{1}{5}$.

I. 1) On effectue des lancers successifs d'un dé équilibré et on désigne par u_i le numéro obtenu au $i^{ième}$ lancer de ce dé.
Calculer les pobabilités des évènements suivants :

a. $u_1 < u_2$.
b. $u_1 = u_2$.
c. $u_1 \leqslant u_2$.
d. $u_1 > u_2 > u_3$.
e. Lors des trois premiers lancers, les trois numéros obtenus sont distincts $(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)$

2) On effectue toujours des lancers successifs d'un dé équilibré et on arrête les lancers dès que $u_i \leqslant u_{i+1}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.

a. Calculer la probabilité de l'évènement $X = 2$.
b. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
c. Calculer la probabilité de l'évènement $X \geqslant 3$.
d. Déterminer la fonction de répartition de X.
e. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance de X.

3) On effectue cette fois ci des lancers successifs d'un dé équilibré mais on arrête les lancers dès que l'on a obtenu pour la première fois deux fois le même numéro.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.
EXEMPLES :
Si $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 4$, $u_4 = 3$, on arrête les lancers et Y prend la valeur 4.
Si $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$, $u_4 = 6$, $u_5 = 2$, $u_6 = 1$, on arrête les lancers et Y prend la valeur 6.
Déterminer la loi de Y et calculer l'espérance de Y.

II. 1) On choisit au hasard un dé du lot des 10 dés, on le lance et on obtient 6. Quelle est la probabilité de l'évènement "le dé choisi est pipé".

2) On choisit au hasard deux dés du lot des 10 dés, on les lance et on obtient 6 et 6. Quelle est la probabilité de l'évènement "les deux dés choisis sont pipés"

III. On appelle A l'évènement "obtenir au moins deux fois six lorsqu'on lance simultanément cinq dés du lot"

1) Calculer les probabilités p_0, p_2 et p_3 de l'évènement A dans les cas suivants :

- On a lancé les cinq dés pipés
- On a lancé les cinq dés équilibrés
- On a lancé deux dés équilibrés et trois dés pipés

2) On lance maintenant n fois de suite cinq dés dont deux d'entre eux sont équilibrés et les trois autres pipés.
Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement A se réalise lors des n lancers de ces cinq dés.
Déterminer la loi de Z et calculer l'espérance et la variance de Z.

3) k étant un entire naturel vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$, si $Z = k$, on lance alors k fois de suite les cinq dés équilibrés.
Soit U la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement A se réalise lors des k lancers de ces cinq dés équilibrés.

   a. Calculer la probabilité de l'évènement $U = i$ sachant $Z = k$ que l'on note : $P(U = i/Z = k)$
   b. On pose $P(U = 0/Z = 0) = 1$.
   Déterminer la loi de U et calculer l'espérance et la variance de U.