ESG 1988 Option générale Math I

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\times$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ désigne respectivement les ensembles des entiers non négatifs, entiers positifs, entiers, rationnels, réels, complexes.

Problème d'algèbre

On considère l'équation du second degré :

$$(E) : z^2 - bz + c = 0$$

avec b et c coefficients dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $b^2 - 4c < 0$.
α étant l'une des racines de cette équation, on désigne par $\mathbb{Z}(\alpha)$ l'ensemble des nombres complexes défini par

$$\mathbb{Z}(\alpha) = \{z \in \mathbb{C},\ \text{tels que } z = p + \alpha q,\ \text{avec } (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

On définit aussi :

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{z \in \mathbb{C},\ \text{tels que } z = u + \alpha v,\ \text{avec } (u,v) \in \mathbb{Q}^2\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}(\alpha)$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$;
   que dire de la deuxième racine de (E) ?
   Prouver que $\mathbb{Z}(\alpha) = \mathbb{Z}(\beta)$, où β est l'autre racine de (E);
   Exprimer β en fonction de α.

2. Soit f l'application de $\mathbb{Z}(\alpha)$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{Z}(\alpha), \quad z = p + \alpha q, \quad f(p + \alpha q) = p^2 + bpq + cq^2$$

   (a) Calculer le produit $|z|^{-2} f(z)$, où $|z|$ est le module de z.

   (b) Montrer :

$$\begin{array}{rl} \forall x \in \mathbb{Z}(\alpha) & f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \forall x \in \mathbb{Z}(\alpha), \quad \forall y \in \mathbb{Z}(\alpha), & f(xy) = f(x)f(y) \end{array}$$

3. Soit $G(\alpha)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}(\alpha)$ qui sont inversibles dans $\mathbb{Z}(\alpha)$.

   (a) Montrer que $G(\alpha)$ est un groupe pour la multiplication.

   (b) Quelle est l'image de $G(\alpha)$ par l'application f ?

   (c) En déduire, si $x = p + q\alpha$ est un élément de $G(\alpha)$ alors on a l'inégalité

$$0 \leqslant q^2(4c - b^2) \leqslant 4.$$

   En discutant suivant les valeurs attribués à b et c, déterminer tous les éléments de $G(\alpha)$.
   (On discutera selon : $4c - b^2 = 4$, $4c - b^2 < 4$, $4c - b^2 > 4$)

4. (a) Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$;

   (b) Montrer que l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{Q}$, définies par

$$M(u,v) = \begin{pmatrix} u & v \\ -cv & u + bv \end{pmatrix},\ \text{où } (u,v) \in \mathbb{Q}^2$$

   est un corps pour l'addition et la multiplication matricielle.

(c) Prouver que ce corps est isomorphie au corps $\mathbb{Q}(\alpha)$

5. (a) Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$, où $\mathbb{C}$ est considérer comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.
Quelle est la dimension de ce sous-espace vectoriel ?
   (b) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ à valeurs réelles définie par $F(x) = (f(u+v\alpha))^{1/2}$ est une norme euclidienne sur l'espace vectoriel $\mathbb{Q}(\alpha)$
   (c) Etant donné un élément y de $\mathbb{Q}(\alpha)$ tel que $y \neq 0$, montrer que $(y, \alpha y)$ constitue une base de $\mathbb{Q}(\alpha)$.
   (d) On considère deux éléments X et Y de $\mathbb{Q}(\alpha)$, avec $Y \neq 0$, montrer qu'il existe un élément τ de $\mathbb{Q}(\alpha)$ et deux rationnels λ et μ appartenant à l'intervalle $[0,1[$ tels que

$$X = Y\tau + R, \text{ où } R = (\lambda + \mu\alpha)Y.$$

Problème d'analyse

(deux parties indépendantes)

Première partie :

Soient

$$A = \int_0^1 (1-x^2)^{-1} \ln x dx, \quad B = \int_0^1 (1-x)^{-1} \ln x dx, \quad \text{et} \quad C = \int_0^1 (1+x)^{-1} \ln x dx$$

où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.

1. (a) Prouver l'existence de A, B, C.
   (b) Prouver $B + C = 2A$, et $4A - 4C = B$
   (c) Prouver que $C = -\int_0^1 x^{-1} \ln(1+x) dx$.

2. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Par un développement en série de $x^{-1}\ln(1+x)$, prouver l'existence de C.
Calculer la valeur de C.
Calculer les valeurs de A et B.

Deuxième partie.

Soit B une partie non vide de $\mathbb{R}$, une partition continue de l'unité sur B, est une famille finie $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de fonctions continues de B dans $[0,1]$ telles que $\forall x \in B, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i(x) = 1$.
Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, posons

$$\begin{aligned} U_i &= \{x \in B \text{ tel que } a_i(x) \neq 0\} \\ \delta_i &= \sup\{|x-y|, \quad x \text{ et } y \in U_i\}, \end{aligned}$$

le diamètre de la partition $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sur B est $\delta = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \delta_i$.
Soient a et b, deux réels donnés, avec $a < b$, soient $A = [a,b]$ l'intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, et $A_0 = [0,1]$.
On note $C^{(0)}(A)$ (respectivement $C^{(0)}(A_0)$) l'ensemble des fonctions continues sur A, (respectivement sur A_0), à valeurs réelles.
Soient f_0 dans $C^{(0)}(A_0)$, et f dans $C^{(0)}(A)$.

1. $\forall x \in A_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall k \in \{0,..,n\}$, soit $f_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

(a) Prouver : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}$, $(f_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une partition continue de l'unité sur A_0.
Quelle est le diamètre de cette partition ?

(b) Successivement, pour $n = 2, 3, 4$ tracer, dans un même repère orthonormé, les fonctions $(f_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$.
$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}$, $\quad \forall k \in \{0, 1, .., n\}$, quelle est l'abscisse du maximum de $f_{n,k}$? dessiner l'allure général de $f_{n,k}$.

2. $\forall x \in A_0$, $\quad \forall s > 0$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}^{\times}$, définissons :
le polynôme $B_n(f_0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_0(\frac{k}{n}) f_{n,k}(x)$.
$\omega_{n,s}(x) = \{k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n \text{ et } |k - nx| \leqslant ns\}$
$\gamma_{n,s}(x) = \{k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n \text{ et } |k - nx| \geqslant ns\}$

(a) Prouver : $\forall x \in A_0$, $\quad \forall s > 0$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}^{\times}$,

$$|f_0(x) - B_n(f_0)| \leqslant |S(\omega_{n,s}(x))| - \left|S(\gamma_{n,s}(x))\right|$$

où

$$\begin{aligned} S(\omega_{n,s}(x)) &= \sum_{k\in\omega_{n,s}(x)} [f_0(x) - f_0(\frac{k}{n})] f_{n,k}(x) \\ S(\gamma_{n,s}(x)) &= \sum_{k\in\gamma_{n,s}(x)} [f_0(x) - f_0(\frac{k}{n})] f_{n,k}(x) \end{aligned}$$

(b) Prouver les quatres relations

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= nx \\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k k^2 x^k (1-x)^{n-k} &= nx^2 - nx(1-x) \\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k (nx-k)^2 x^k (1-x)^{n-k} &= nx(1-x) \\ \sum_{k\in\gamma_{n,s}(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &\leqslant (4nr^2)^{-1} \end{aligned}$$

3. (a) Majorer par une quantité d'ordre n^{-1}, l'erreur :

$$\left| \sum_{k\in\gamma_{n,s}(x)} [f_0(x) - f_0(\frac{k}{n})] f_{n,k}(x) \right|$$

(b) Prouver : $\forall \varepsilon > 0$, $\quad \exists N \in \mathbb{N}$, $\quad \forall n \geqslant N$, $\quad \forall x \in A_0$, on a

$$|f_0(x) - B_n(f_0)(x)| \leqslant \varepsilon$$

(c) En déduire une propriété pour un élément f dans $C^{(0)}(A)$.

Probabilités, statistiques

La carte à puce.
Le système de paiement d'un pays est organisé de la manière suivante :

- Tous les particuliers possèdent une carte de paiement muni d'un circuit intégré. A sa délivrance, toute carte donne à son porteur un pouvoir d'achat exprimer en nombre de transactions (ce pouvoir d'achat supposé identique pour tous les porteurs sera noté N).
- Les commerçants sont équipés :

- soit d'un dispositif "déconnecté" : le certificateur, permettant de vérifier l'authenticité de la carte, de contrôler le code confidentiel, et de décrémenter le pouvoir d'achat de la carte d'une unité à chaque transaction (le nouveau pouvoir d'achat est alors inscrit dans la carte).
- soit d'un terminal de paiement électronique (TPE), qui en plus des fonctionnalités du certificateur permet, de vérifier que la carte ne figure pas dans le fichier central des cartes en opposition, de recharger la carte en remettant son pouvoir d'achat à N transactions (renouvellement de quota). Ce rechargement n'intervient que si le pouvoir d'achat résiduel de la carte au moment de son introduction dans le TPE est inférieur ou égal à un seuil de renouvellement s. Si le pouvoir d'achat résiduel de la carte au moment de son introduction dans le TPE est strictement supérieur à s, le rechargement n'intervient pas et le pouvoir d'achat est décrémenté d'une unité comme dans le cas du certificateur.

On suppose qu'une proportion a ($0 < a < 1$) de transactions s'effectue sur TPE, le reste s'effectuant sur certificateur.
N.B : les transactions d'un montant élévé font l'objet de vérifications supplémentaires pour s'assurer de la solvabilité du porteur. On ne tiendra pas compte de ce fait pour la suite du problème.

1. Calculer en fonction de N, s et a :

   (a)
   - la probabilité pour qu'une transaction donnée ne puisse avoir lieu, faute de pouvoir d'achat.
   - le nombre moyen de transactions réalisées par une carte entre deux renouvellements de quota successifs.

   (b) Application numérique $N = 18, \quad s = 5, \quad a = 0,8$.

2. Une carte est immédiatement mise en opposition quand son possesseur légitime signale un vol ou une perte. Calculer le pouvoir d'achat moyen d'une carte au moment de sa mise en opposition