ESG 1990 Option générale Math II

Question préliminaire

Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1), \quad \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i-1)(n-j+1), \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(n-i+1)j$$

Problème

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Dans cette urne, toutes les boules sont tirées une à une et avec remise.
Soit i un entier naturel non nul, on désigne par x_i le numéro de la boule tirée au $i^{ième}$ tirage.
On suppose que pour tout entier $i \geqslant 1$ et pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$ la probabilité de l'évènement $(x_i = j)$ est égale à $\dfrac{1}{n}$.

I. Un joueur A joue au jeu suivant : il tire successivement avec remise deux boules de l'urne.
Si $x_1 < x_2$ le joueur gagne a francs sinon il perd 1à francs
Soit X_A la variable aléatoire égale au gain algébrique de ce joueur.

1) Déterminer la loi de probabilité de X_A.
2) Déterminer en fonction de n pour quelle valeur de a l'espérance mathématique de X_A est nulle.

II. Un joueur B joue au jeu suivant : il tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne.
Si $x_1 < x_2$ et $x_2 \geqslant x_3$ le joueur B gagne b francs sinon il perd 10 francs.
Soit X_B la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur B.

1) Déterminer la loi de probabilité de X_B lorsque $n = 3$.
2) Si $x_2 = i$, quelle est la probabilité pour que B gagne b francs.
3) Déterminer la loi de probabilité de X_B.

III. Un joueur C joue au jeu suivant : il tire successivement et avec remise 4 boules de l'urne.
Si $x_1 < x_2$ et $x_2 \geqslant x_3$ et $x_3 \leqslant x_4$, le joeur gagne c francs, sinon le joueur perd 10 francs.
Soit X_C la variable égale au gain algébrique du joueur C.

1) Déterminer la loi de probabilité de X_C lorsque $n = 3$.
2) Si $x_2 = i$ et $x_3 = j$, déterminer la probabilité de l'évènement $(X_C = c)$
3) Déterminer la loi de probabilité de X_C.

IV. Un joueur joue au jeu suivant : il tire successivement et avec remise 4 boules de l'urne.
Si $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4$ le joueur gagne d francs sinon il perd 10 francs.
Soit X_D la variable égale au gain algébrique du joueur D.

1) Déterminer la loi de probabilité de X_D lorsque $n = 3$.
2) Si $x_2 = i$ et $x_3 = j$, calculer la probabilité de l'évènement $X_D = d$
3) Déterminer la loi de probabilité de X_D.

V. Un joueur E joue au jeu suivant : dans un premier temps, il tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne.
Si $x_1 < x_2$, le jeu s'arrête et le joueur gagne e francs.
Si $x_1 \geqslant x_2$, le joueur tire alors une troisième boule de l'urne.
Si $x_2 \geqslant x_3$, le joueur gagne alors e francs, sinon il perd 10 francs
Soit X_E le gain algébrique du joueur E.

1) Déterminer la loi de probabilité de X_E.
2) Calculer l'espérance mathématique de X_E.

VI. On suppose $n = 2$, $a = b = c = d = 10$
Soit $Y = X_A + X_B + X_C + X_D$

1) Calculer la probabilité de l'évènement $X_D = 10$ sachant $Y = -20$.
2) Calculer l'espérance mathématique de Y.