ESG 1991 Option générale Math I

Exercice de probabilités

A - question préliminaire

q désigne un réel, tel que $0 < q < 1$.

a) Calculer pour $n \geqslant 2$, les sommes $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$ et $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2}$.

b) En déduire les sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}$.

B -

On dispose d'une urne U dont la proportion du nombre de boules blanches est $\frac{2}{3}$ et la proportion du nombre de boules noires est $\frac{1}{3}$ et d'une cible C.
On considère alors le jeu suivant : un joueur tire une première fois sur la cible C; s'il atteint, il a gagné la partie; sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U; s'il obtient une boule noire, il a perdu la partie, sinon il remet la boule blanche dans l'urne et retire dans la cible. S'il atteint, il a gagné la partie; sinon il retire au hasard une boule de l'urne; s'il obtient une boule noire, il a perdu la partie; sinon il remet la boule blanche dans l'urne et retire sur la cible et ainsi de suite .....
Soit $p \in [0, 1]$, la probabilité qu'à le joueur d'atteindre la cible lors d'un tir. Soit $n \in \mathbb{N}^{\times}$ et soient A_n, B_n, A, B, D les évènements suivants :
A_n : " le joueur gagne la partie à l'issue du $n^{ième}$ tir "
B_n : " le joueur perd la partie à l'issue du $n^{ième}$ tir "
A : " le joueur gagne la partie "
B : " le joueur perd la partie "
D : " la partie ne s'arrête pas "

1. Calculer, en fonction de n et p, les probabilités de A_n et B_n.
2. Calculer, en fonction de p, les probabilités de A, B et D.
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de coups nécessaires pour que la partie s'arrête
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer l'espérance de X
   (c) Calculer la variance et l'écart-type de X
4. Sachant que le joueur a perdu la partie, calculer la probabilité que ce soit à l'issue du $n^{ième}$ tire ($n \in \mathbb{N}^{\times}$) (on supposera dans cette question $p \neq 1$).
5. Etudier en fonction des valeurs de p, le fait que le joueur ait plus ou moins de chance de gagner à ce jeu.

Exercice d'algèbre

On désigne par $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 4 à éléments dans $\mathbb{R}$ et par $\mathcal{C}$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On note I la matrice unité de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$.
On dira que 2 matrices M et M' de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ permutent si $MM' = M'M$
On considère l'ensemble G des matrices de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ qui ont la forme suivante :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} & b \\ 0 & 1 & a & c \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } a, b, c \text{ sont trois nombres réels.}$$

1. (a) Montrer que G est stable pour la multiplication matricielle.
   (b) Montrer que I appartient à G.
   (c) Montrer que tous les éléments de G sont inversibles et donner l'inverse de $M(a,b,c)$.

2. (a) Calculer $M(a,b,c)M(a',b',c') - M(a',b',c')M(a,b,c)$
   (b) En déduire les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux matrices de G permutent.

3. Soit F l'ensemble des application linéaires $f(a,b,c)$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ de matrice associée $M(a,b,c)$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ que l'on notera M.
   Montrer que F laisse invariant le sous-espace vectoriel E de dimension trois engendré par les trois premiers vecteurs de la base canonique $\mathcal{C}$.

4. Soit U_M la matrice $U_M = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel.
   On note h l'application qui associe à toute matrice M de G, la matrice U_M
   (a) Déterminer l'ensemble H des matrices M de G telles que $h(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $N - I$, où N appartient à H forme un espace vectoriel.

5. Soit M une matrice de G, N une matrice de H, vérifier que $M^{-1}NM$ est une matrice de H; M^{-1} désignant la matrice inverse de M.

6. Comparer deux matrices M et M' de G telles que

$$MM' = M'M \text{ et } h(M) = h(M')$$

Problème d'analyse

A. L'objectif de cette première partie est de rechercher toutes les fonctions F d'une variable réelle qui vérifient l'équation

$$(1) \qquad F(x+1) - F(x) = G(x),$$

où $G(x)$ est une fonction donnée.

1) Montrer que si deux fonctions F_1 et F_2 vérifient l'équation (1), leur différence est une fonction C, périodique de période 1.

2) On se place dans le cas où la fonction $G(x)$ est un polynôme et on cherche parmi les fonctions F solutions de l'équation (1) celles qui sont aussi des polynômes.
Quelle est dans ce cas la fonction C ?
Montrer que si des fonctions f_i sont-elles telles que $f_i(x+1) - f_i(x) = x^i$ (où i est un entier $\geqslant 0$ quelconque), tout polynôme F vérifiant (1) avec $G(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i$ (où $\lambda_i \in \mathbb{R}$) s'exprime sous la forme :

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(x) + K$$

où K est une constante réelle.

B. Le but de cette seconde partie est d'étudier la fonction de fonctions g_λ de la variable réelle x définies par :

$$g_\lambda(x) = \frac{xe^{\lambda x}}{e^x - 1}$$

C_λ étant la courbe représentative de g_λ.

1) Comparer la position relative des courbes C_λ et $C_{1-\lambda}$.
2) Suivant la valeur de λ, préciser les branches infinies de C_λ quand x tend vers l'infini ($+\infty$ et $-\infty$) et donner la position de la courbe par rapport à son asymptote, s'il y en a une.
3) a. Montrer que g_λ peut-être prolongée par continuité en $x = 0$.
   b. Donner le développement limité à l'ordre 2 au point $x = 0$ de $g_\lambda(x)$. En déduire les tangentes aux courbes C_λ au point d'abscisse $x = 0$ et la position de chaque courbe par rapport à sa tangente.
4) Montrer que la dérivée $g'_\lambda(x)$
   a. est continue sur $\mathbb{R}$ (on utilisera la convention $g'_\lambda(0) = \lim_{x \to 0} g'_\lambda(x)$)
   b. garde un signe constant pour $\lambda \notin]0, 1[$
   c. s'annule et change de signe une seule fois pour $\lambda \in]0, 1[$.
5) Donner sur un même graphique l'allure général des courbes C_λ. On tracera toutefois les courbes avec précision au voisinage de $x = 0$ et on placera l'asymptote quand elle existe. On étudiera en particulier les courbes limites, correspondant à

$$\lambda = 0; \quad \lambda = 1; \quad \lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}; \quad \lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$$