ESG 1991 Option générale Math II

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$.
On suppose que p est la probabilité d'être atteint d'une maladie A non contagieuse part tout individu.

I. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de ces N personnes ayant la maladie A

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer le moment d'ordre 2 de X.

II. Le médecin fait rentrer dans son cabinet ces N personnes, une à une, en les choisissant au hasard pour la consultation (les différents ordres de passages possibles étant équiprobables).
Soit Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première personne consultée ayant la maladie A.
Soit i un entier naturel tel que $1 \leqslant i \leqslant N$ et soit $j \in Y(\Omega)$.
On désigne par $P(Y = j/X = i)$ la probabilité de l'évènement $(Y = j)$ sachant $(X = i)$.

1) a. $\forall j \in Y(\Omega)$, calculer $P(Y = j \ / \ X = 1)$
   b. On désigne par Y_1 la variable aléatoire conditionnée par $(X = 1)$.
   Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y_1.
2) a. $\forall j \in Y(\Omega)$, calculer $P(Y = j \ / \ X = 2)$
   b. On désigne par Y_2 la variable aléatoire conditionnée par $(X = 2)$.
   Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y_2.
   c. Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant l'inégalité de Bienyamé-Tchebychev déterminer un majorant de la probabilité de l'évènement $|3Y - (N + 1)| \geqslant \varepsilon$.
3) Calculer $\forall j \in Y(\Omega), \quad P(Y = j \ / \ X = i)$
4) On suppose $N = 4$ et $p = \dfrac{1}{2}$.
   a. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
   On admettra que l'évènement $(X = 0)$ entraine l'évènement $(Y = 0)$.
   On présentera la loi conjointe par un tableau à double entrée.
   b. En déduire la loi de la probabilité de Y.
   c. Calculer la covariance du couple (X, Y).
5) On définit la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la deuxième personne consultée ayant la maladie A.
   a. Calculer $\forall k \in Z(\Omega), \quad P(Z = k \ / \ X = 2)$.
   b. On désigne par Z_2 la variable aléatoire Z conditionnée par l'évènement $(X = 2)$.
   Déterminer par un tableau à double entrée la loi conjointe du couple (Y_2, Z_2) lorsque $N = 4$