ESG 1994 Option générale Math I

Exercice de probabilité

Une usine fabrique des cylindres en grande série, en deux opérations indépendantes.

1. La première opération consiste en un tournage. Deux machines M_1 et M_2 sont utilisées pour effectuer toutes les deux ce même travail. La production journalière de la machine M_1 est $n_1 = 1500$ pièces avec une proportion de pièces défectueuses de $p_1 = 0,002$; pour la machine M_2, on a $n_2 = 2100$ pièces avec une proportion de pièces défectueuses $p_2 = 0,003$. Dans la production totale d'un certain jour, on choisit au hasard une de ces pièces tournées.

   (a) Calculer la probabilité pour que cette pièce présente un tournage défectueux.

   (b) Sachant que le tournage de cette pièce est défectueux, calculer la probabilité qu'elle ait été tournée par la machine M_1.

2. La seconde opération consiste en un fraisage. L'expérience montre que, en fabrication normale, 2% de ces fraisages sont défectueux. On dispose d'un lot comprenant un très grand nombre N de ces pièces fraisées. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement au hasard de n pièces de ce lot, associe le nombre de pièces dont le fraisage est défectueux (on supposera n petit devant N).

   (a) Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser l'espérance mathématique et l'écart-type de X en fonction de n.

   (b) Dans cette question, $n = 5$. Calculer la probabilité pour que, parmi les 5 pièces prélevées, 3 aient un fraisage défectueux.

   (c) Dans cette question, $n = 100$. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X (justifier) ? Calculer alors la probabilité pour que, parmi les 100 pièces prélevées, il n'y ait pas plus de 3 dont le fraisage soit défectueux.

3. On tire maintenant au hasard une pièce dans un lot de pièces où les deux usinages précédents ont été réalisés. Calculer les probabilités pour que cette pièce :

   (a) présente les deux usinages défectueux.

   (b) présente l'un au moins de ces usinages défectueux

   (c) ne présente auxun des usinages défectueux.

4. Sur chacun des cylindres fabriqués, on contrôle le diamètre y, qui, en principe, doit être de $50,0$ mm. En fait, les mesures effectuées révèlent que le diamètre de ces cylindres est une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne $50,2$ mm et d'écart-type $0,5$ mm. En raison d'un montage réalisé par la suite par un robot, les cylindres dont le diamètre n'est pas compris entre $49,6$ mm et $50,8$ mm doivent être mis au rebut.
   Calculer la probabilité pour qu'un cylindre soit mis au rebut.

Exercice d'algèbre

On considère les matrices à coefficients réels

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -\frac{7}{2} & 1 \\ -2 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = 2A \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) A l'aide de la méthode du pivot de Gauss, montrer que la matrice B est inversible et calculer B^{-1}; puis en déduire A^{-1}.

   (b) Calculer J^2. En déduir que J est inversible et déterminer l'inverse J^{-1} de J.

   (c) Vérifier que $AJ = JA$.

2. (a) On considère la matrice $M = A + \frac{3}{2}I + 3J$.
   Calculer M, puis M^2. En déduire une relation simple liant M et M^2, puis démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 + \alpha AJ + \beta I = O$, où O désigne la matrice carrée nulle d'ordre 3.

   (b) Déduire de la question 2)a) que la matrice A est inversible. Exprimer A^{-1} à l'aide de A et J puis retrouver le résultat de la question 1)a).

3. On considère le système

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y - 2z = 1 \\ x - \frac{7}{2}y + z = -2 \\ -2x + y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

   où x, y et z sont des nombres réels.
   Ecrire le système linéaire sous forme matricielle puis déterminer les valeurs respectives de x, y et z.

4. Trouver les matrices carrées d'ordre 3 P, Q et R qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}P + Q - 2R = I \\ P - \frac{7}{2}Q + R = J \\ -2P + Q - \frac{1}{2}R = 0 \end{cases}$$

Problème d'analyse

Toutes les fonctions considérées dans ce problème sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que tout nombre irrationnel est limite d'une suite croissante et d'une suite décroissante de nombres rationnels. L'ensemble des réels strictement positifs est noté $\mathbb{R}_+^\times$. L'ensemble des réels strictement négatifs est noté $\mathbb{R}_-$.

1. On appelle F l'ensemble des applications continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant l'égalité :

$$(1) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) = [f(x)f(y)]^2$$

   Soit f un élément de F

   (a) Vérifier que la fonction 2^{-x^2} appartient à F.

   (b) Ecrire ce que devient la relation (1) dans chacun des cas suivants :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

(c) Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?

(d) Montrer que f est l'application nulle si et seulement si $f(0) = 0$

(e) Montrer que si f s'annule pour une valeur $x = a$, elle s'annule pour $x = 0$ (on pourra considérer les nombres $f(\frac{a}{2}), f(\frac{a}{4}), ..$, et la question 1)b))

(f) Montrer que si f n'est pas l'application nulle, on a $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^\times$ ou $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_-$.

2. On appelle G l'ensemble des applications continues g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant à l'égalité :

$$(2) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) + g(x-y) = 2\left[g(x) + g(y)\right]$$

(a) Déterminer les éléments de G à partir des éléments de F (on pourra considérer la fonction $g(x) = \ln|f(x)|$, où f est un élément de F distinct de l'application nulle sur $\mathbb{R}$)

(b) Soit g un élément de G

i. Montrer que $g(0) = 0$

ii. Montrer que g est une fonction paire

iii. Démontrer l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(nx) = n^2 g(x)$.

iv. Que peut-on en déduire de $g(\frac{p}{q}x)$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\times$ (on pourra effectuer une démonstration par récurrence et poser $y = -\dfrac{qx}{q+1}$ dans la relation (2)).

(c) Déterminer l'ensemble G. En déduire l'ensemble F.

3. On se propose ici de retrouver les éléments de G par une autre méthode.
Soit g un élément de G.

(a) Démontrer l'égalité :

$$(3) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2g(x) = \int_0^1 g(x+y)dy + \int_0^1 g(x-y)dy - 2\int_0^1 g(y)dy$$

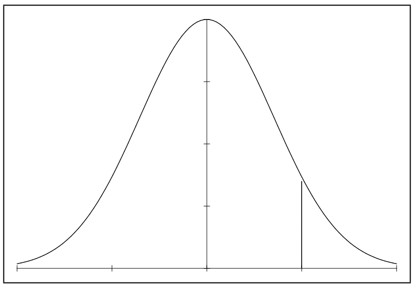
(b) Démontrer que g est dérivable. Exprimer $g'(x)$ sans utiliser le symbole $\int$.

(c) Démontrer que g est deux fois dérivable.

(d) Retrouver à l'aide de $g''(x)$ les résultats du 2)c)

Extrait de la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée, réduites $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t) = P(T < t)$



x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0.99865	0.999 04	0.999 31	0.999 52	0.999 66	0.999 76	0.999 841	0.999 928	0.999 968	0.999 997

à l'unité de la valeur lue dans la table.

Nota : la table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif, il faut prendre le complément

Exemple : pour $t = 1,37$ $\quad \Pi(t = 1,37) = 0,9147$

pour $t = -1,37$ $\quad \Pi(t = -1,37) = 0,0853$