# ESG 2004 Option économique

## EXERCICE D'ALGÈBRE (sur 5 points)

L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $C = (c_1; c_2; c_3)$ avec

$$c_1 = (1; 0; 0), \quad c_2 = (0; 1; 0), \quad c_3 = (0; 0; 1).$$

On noté $I$ la matrice unité d'ordre 3 et $O$ la matrice nulle d'ordre 3.
On considère l'endomorphisme $u$ de $E$ défini par :

$$u(c_1) = 4c_1 + c_2 + c_3; \quad u(c_2) = c_1 + 4c_2 + c_3; \quad u(c_3) = c_1 + c_2 + 4c_3$$

1. Déterminer la matrice $A$ associée à $u$ dans la base $C$.
2. Calculer $(A - I)(A - 6I)$.
3. On considère les vecteurs $b_1 = c_1 - c_2$, $b_2 = c_1 - c_3$ et $b_3 = c_1 + c_2 + c_3$.
   (a) Montrer que $B = (b_1; b_2; b_3)$ est une base de $E$.
   (b) Soit $P$ la matrice de passage de la base $C$ à la base $B$. Déterminer par la méthode du pivot de Gauss la matrice $P^{-1}$
   (c) Déterminer la matrice $M$ de $u$ relativement à la base $B$.
4. Pour tout entier naturel non nul n , calculer $M^n$, et exprimer $A^n$ en fonction de $M^n$, $P$ et $P^{-1}$.

## EXERCICE D'ANALYSE (sur 10 points)

Pour tout entier naturel non nul n , on note la fonction $f_n$ définie sur $[0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.
On note $C_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

A) Étudier les variations de $f_n$ sur $[0; +\infty[$. Pour $n > 2$, étudier la position relative de $C_n$ et de $C_{n-1}$ et vérifier que le point de $C_n$ , $A(n; f_n(n))$ est aussi sur $C_{n-1}$ .

B) Étude de la suite $(u_n)$ définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = f_n(n)$.

1. En utilisant les résultats de la partie A), montrer que $(u_n)$ est décroissante.
2. Soit $g$ la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $g(t) = \ln(1 + t) - t + \dfrac{t^2}{4}$.
   (a) Montrer que pour tout $t$ de $[0; 1]$, $\ln(l + t) \leqslant t - \dfrac{t^2}{4}$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ , $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{1 - \frac{1}{4n}}$
3. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant e^{-\frac{1}{4n}}$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}$
4. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$; $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\quad u_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\ln(n)}$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)$?

C) Pour $a$ réel fixé, positif, et pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose $I_n(a) = \int\limits_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$

1. Calculer $I_1(a)$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ , pour tout $t \geqslant 0$, $\quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{t^n}{n!}$.
   En déduire un encadrement de $I_n(a)$.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\quad \frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$. Donner alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$, puis la limite de $I_n(a)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
4. Trouver lorsque $n \geqslant 2$, une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ et en déduire que pour tout $n \geqslant 2$,
$$I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + ... + \frac{a^n}{n!}\right).$$
   L'égalité est-elle valable pour $n = 1$ ?
5. Démontrer que pour tout $a \geqslant 0$, $\quad e^a = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{1!} + ... + \frac{a^n}{n!}\right)$.

## <u>EXERCICE DE PROBABILITÉS</u> (sur 5 points)

Question préliminaire :
$q$ désigne un nombre réel, tel que $0 < q < 1$.

- Calculer pour $n > 2$ la somme suivante: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} q^k$
- En déduire pour $n > 2$ la somme suivante : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} kq^{k-1}$

Dans un stand de tir un joueur dispose de $n$ fléchettes ($n$ entier fixé, supérieur ou égal à 2) pour tenter de faire éclater un ballon. À chaque essai la probabilité de succès vaut $p$, avec ( $(1 < p < 1)$, et donc la probabilité de l'échec vaut $q$ (avec $q = 1 - p$). On suppose que les différents essais sont indépendants les uns des autres et que le joueur s'arrête dès que le ballon éclate (s'il éclate !).

1. Soit $X$ le nombre aléatoire de fléchettes utilisées par le joueur.
   (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre $X$ ?
   (b) Déterminer la loi de probabilité de $X$
   (c) Calculer 1'espérance mathématique de $X$.
2. Sachant que le ballon a éclaté, quelle est la probabilité que ce soit avec la $n^{ème}$ fléchette ?
3. Dans cette question on suppose que l'on a $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$. Si le joueur fait éclater le ballon avec la $k^{ème}$ fléchette ou, s'il a épuisé toute les fléchettes et on pose $k = 3$, ($k$ est compris entre 1 et 3), il a le droit de lancer $(4 - k)$ fois une pièce équilibrée et il reçoit un euro pour chaque « pile » obtenu. Soit Y le gain aléatoire de ce joueur.
   (a) Déterminer la loi conjointe du couple $(X; Y)$.
   (b) Établir la loi de probabilité de $Y$.
   (c) Calculer l'espérance mathématique de $Y$.