ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTIONS : GENERALE (4h)

Problème I

1. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie, continue, deux fois dérivable sur le segment $[a, b]$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit x_0 un élément de l'intervalle $]a, b[$;
   Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]a, b[$ tel que
   $$f(x_0) = \frac{f''(\alpha)}{2}(x_0 - a)(x_0 - b).$$
   (On pourra étudier la fonction $x \mapsto f_1(x) = f(x) - (\frac{A}{2})(x - a)(x - b)$ où $A = \frac{2f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}$).

2. Soit g une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle qu'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout élément x de $[a, b]$, on ait :
   $$m \leqslant g''(x) \leqslant M$$
   Démontrer que l'on a pour tout élément x de $[a, b]$
   $$M\frac{(x-a)(x-b)}{2} \leqslant g(x) - g(a)\frac{x-a}{a-b} - g(b)\frac{x-b}{b-a} \leqslant m\frac{(x-a)(x-b)}{2}.$$
   En déduire les relations
   $$-M\frac{(b-a)^3}{12} \leqslant \int_a^b g(x)dx - \frac{b-a}{2}\left[g(a) + g(b)\right] \leqslant -m\frac{(b-a)^3}{12} \qquad (1)$$

3. En appliquant la double inégalité (1) à la fonction ln sur l'intervalle $[n, n+1]$ (avec $n \in \mathbb{N}^{\times}$), démontrer la relation
   $$\frac{1}{12(n+1)^2} \leqslant (n + \frac{1}{2})\left[\ln(n+1) - \ln n\right] - 1 \leqslant \frac{1}{12n^2}.$$

4. On pose pour tout entier n non nul
   $$U_n = \ln\left(n^{n+1/2}e^{-n}\right) - \ln(n!)$$
   et pour tout entier $n \geqslant 2$
   $$V_n = U_n + \frac{1}{12(n-1)}$$
   Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.
   En déduire que la suite (V_n) converge vers une limite C et que l'on a pour tout entier $n \geqslant 2$
   $$C - \frac{1}{12(n-1)} < U_n < C$$

5. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
   $$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$$

Démontrer les relations : $I_0 = \dfrac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1$

$$I_0 > I_1 > \cdots > I_n > I_{n+1} > \cdots$$

et

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ pour tout entier } n \geqslant 2.$$

En déduire les valeurs de I_{2n} et I_{2n+1}.

6. Démontrer la relation

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}(n!)^2}{\left[(2n)!\right]^2 \times n}$$

et en déduire que $C = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

Problème II

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Une application f de E dans V est dite $\mathbb{R}$-linéaire si, pour tout élément x de E, tout élément y de E et tout nombre réel λ, on a :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, f est dite $\mathbb{C}$-linéaire si, pour tout élément x de E, tout élément y de E et tout nombre complexe α, on a :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

1. Soient A et B deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ et f une application $\mathbb{R}$-linéaire de A dans B. Démontrer que f est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si $f(ix) = if(x)$ pour tout élément x de A.

2. Dans la suite du problème, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On considère $E \times E$ muni de l'addition interne

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \qquad \left[(x,y) \in E \times E \quad (x',y') \in E \times E\right]$$

et de la loi externe

$$\alpha(x,y) = (ax - by, bx + ay) \qquad [(x,y) \in E \times E, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \alpha = a + ib]$$

Montrer que $E \times E$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ qui sera noté $E_{\mathbb{C}}$.

3. Soit J l'application de E dans $E_{\mathbb{C}}$ définie par $J(x) = (x, 0)$ pour tout élément x de E. Montrer que J est $\mathbb{R}$-linéaire et injective, et que pour tout élément (x,y) de $E_{\mathbb{C}}$, $(x,y) = J(x) + iJ(y)$.

4. Montrer que $E_{\mathbb{C}}$ et J possèdent la propriété suivante :

(P): Pour tout espace vectoriel V sur $\mathbb{C}$ et toute application $\mathbb{R}$-linéaire f, de E dans V, il existe une application $\mathbb{C}$-linéaire $\overline{f}$ de $E_{\mathbb{C}}$ dans V, et une seule, telle que $f = \overline{f} \circ J$.

5. Montrer que E' est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et φ une application $\mathbb{R}$-linéaire de E dans E' qui possèdent la propriété (P), alors E' est isomorphe à $E_{\mathbb{C}}$.

6. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On construit comme ci-dessus $E_{\mathbb{C}}$ et J, et $F_{\mathbb{C}}$ et J_1 respectivement. Soit f une application $\mathbb{R}$-linéaire de E dans F. Montrer qu'il existe une application $\mathbb{C}$-linéaire $f_{\mathbb{C}}$ de $E_{\mathbb{C}}$ dans $F_{\mathbb{C}}$ et une seule, telle que

$$f_{\mathbb{C}} \cdot J = J_1 \circ f$$

7. Si G est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, J_2 et $G_{\mathbb{C}}$ construits comme ci-dessus, g une application $\mathbb{R}$-linéaire de F dans G et $g_{\mathbb{C}}$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire de $F_{\mathbb{C}}$ dans $G_{\mathbb{C}}$ correspondante; montrer que $(g \circ f)_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$.

8. Montrer que $(\mathrm{Id}_E)_{\mathbb{C}} = \mathrm{Id}_{E_{\mathbb{C}}}$ et qui si f est un isomorphisme, alors $f_{\mathbb{C}}$ est un isomorphisme.