ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE

OPTIONS : GENERALE (2h)

Exercice 1

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
   Déterminer ses valeurs propres. Diagonaliser A, c'est-à-dire trouver une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

2. Calculer les coefficients de A^n en fonction de n.

3. On considère les trois suites réelles (U_n), (V_n), (W_n) définies par leurs premiers termes : U_0, V_0, W_0 et les relations suivantes :

$$\begin{aligned} U_n &= -4U_{n-1} - 6V_{n-1} \\ V_n &= 3U_{n-1} + 5V_{n-1} \\ W_n &= 3U_{n-1} + 6V_{n-1} + 5W_{n-1} \end{aligned}$$

   Calculer U_n, V_n, W_n en fonction de n et de U_0, V_0, W_0.

Exercice 2

Soit E une algèbre sur un corps commutatif K. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E (considérée comme espace vectoriel sur K). Un endomorphisme D de E est appelé une dérivation dans E s'il vérifie la condition suivante :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

On désigne par $\mathcal{D}(E)$ l'ensemble des dérivations de E.
Pour tout endomorphisme f de E, on pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout entier naturel $n > 0$, $\quad f^n = f^{n-1} \circ f$.

1. Soit e l'élément neutre de E. Montrer que l'application φ de K dans E définie par $\varphi(\alpha) = \alpha e$ pour tout $\alpha \in K$ est un homorphisme d'anneaux injectif. Dans la suite du problème, on identifiera K et $\varphi(K)$ au moyen de φ.

2. Soit D une dérivation de E. Calculer $D(e)$ et $D(\alpha)$ pour $\alpha \in K$

3. Montrer que si $a \in E$, l'application D_a de E dans E définie par

$$D_a(x) = ax - xa$$

   pour tout élément x de E est une dérivation.

4. Montrer que $\mathcal{D}(E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

5. Montrer qu'en général, $\mathcal{D}(E)$ n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

6. Montrer que si D_1 et D_2 sont des éléments de $\mathcal{D}(E)$, il en est de même de

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

Exercice 3

A) On donne un nombre réel, q, compris entre 0 et 1. On pose, n étant un entier positif,

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} q^i, \quad B_n = \sum_{i=1}^{n} i q^{i-1}, \quad C_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 q^{i-1}$$

1. Calculer, en fonction de q et n, les expressions A_n, B_n et C_n.
2. Montrer, en utilisant la théorie du logarithme népérien, que les quantités q^n et $n^\alpha q^n$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (α réel positif arbitraire)
3. Déduire des calculs précédents, les limites de A_n, B_n et C_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

B) On lance un dé parfaitement symétrique jusqu'à obtenir l'as et l'on appelle $P(i)$ la probabilité de production de l'as au bout de i coups.

1. Calculer $P(i)$ et vérifier que $\sum_{i=1}^{+\infty} P(i) = 1$.
2. Calculer l'espérance mathématique, $\bar{i}$, de i.
3. Calculer l'écart-type σ_i.