

MATHÉMATIQUES 2<sup>ème</sup> ÉPREUVE

OPTION : GENERALE, durée : 2h

**EXERCICE 1**

On considère l'intégrale  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n \exp(-\frac{x^2}{2}) dx, \quad n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que cette intégrale est convergente.
2. Trouver une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n-2}$  pour  $n \geq 2$ .
3. Calculer  $I_n$  lorsque  $n$  est impair.  
En admettant que  $I_0 = \sqrt{2\pi}$ , calculer  $I_n$  lorsque  $n$  est pair.

**EXERCICE 2**

Soient les deux suites  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par

$$\begin{cases} U_n = 3U_{n-1} + 2V_{n-1} \\ V_n = U_{n-1} + 2V_{n-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 1 \end{cases}$$

Calculer  $U_n$  et  $V_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 3**

Un fumeur a dans sa poche deux boites d'allumettes de  $n$  allumettes chacune. Chaque fois qu'il a besoin d'une allumette, il prend au hasard l'une des boites.

1. Quelle est la probabilité que, lorsqu'il prend la dernière allumette d'une boite, l'autre boite contienne encore  $x$  allumettes ?  
Quelles sont les valeurs possibles de  $x$  ?
2. Distract, il se rend compte qu'une boite est vide, non pas lorsqu'il prend la dernière allumette de la boite, mais lorsque, cherchant une allumette, il prend une boite et constate qu'elle est vide.  
Quelle est la probabilité que, lorsqu'il constate ainsi pour la première fois qu'une boite est vide, l'autre contienne encore  $x$  allumettes ? Quelles sont les valeurs possibles de  $x$  ?
3. Les allumettes des deux boites sont discernables (par exemple, elles sont de deux couleurs différentes).  
Le fumeur vide dans sa poche les  $2n$  allumettes et il en prend une chaque fois qu'il désire fumer.  
Quelle est la probabilité que, lorsqu'il prend la dernière allumette de la couleur épuisée en premier, il reste encore  $x$  allumettes de l'autre couleur ?
4. Dans chacun des trois cas ci-dessus, calculer les probabilités attachées aux diverses valeurs de  $x$  quand  $n = 3$