ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : GENERALE

PROBLEME I

Les parties I, II et III peuvent être traitées séparément.

Partie I

Soit $F_n(x) = (x-a)^n(x-b)^n$ pù a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ et n un entier naturel non nul. Démontrer par récurrence que si $p < n$; la dérivée d'ordre p de $F_n(x)$ est de la forme :

$$\frac{d^p F_n(x)}{dx^p} = (x-a)^{n-p}(x-b)^{n-p}\phi_p(x)$$

où $\phi_p(x)$ est un polynôme de degré p que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie II

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; on rappelle la formule de Leibniz :

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}} . \frac{d^k v}{dx^k}$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

On considère les polynômes $Y_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n$ et soit $P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}Y_n(x)$ pour $n \geqslant 1$ et $P_0(x) = 1$.

1. Calculer directement $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$.
2. En appliquant la formule de Leibniz; calculer le coefficient de x^n dans $P_n(x)$ (Pour une formule simple, on admettra que $\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$).
3. Démontrer la relation $(x^2-1)\dfrac{dY_n}{dx} = 2nxY_n$.
4. Cette relation donne : $\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n = 2n\dfrac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^{n-1}x)$.
   En appliquant la formule de Leibniz au second membre de cette équation, montrer que :
   $$(1) \qquad P_n'' = xP_{n-1}' + nP_{n-1}$$
   où $P_n' = \dfrac{dP_n}{dx}$.
5. En appliquant la formule de Leibniz au second membre de l'équation :
   $$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = 2n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^{n-1}x) \text{ (déduite du 3)}$$
   montrer que :
   $$(2) \qquad P_n = xP_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}(n-2)!}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^{n-1}$$

6. En appliquant autrement la formule de Leibniz à $\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, montrer que :

$$(3) \qquad P_n = -\frac{1}{2n}(x^2-1)P'_{n-1} + xP_{n-1} + \frac{1}{2^n(n-2)!}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^{n-1}$$

7. Des formules (1), (2) et (3), déduire :

$$\begin{array}{ll} (4) \qquad & (x^2-1)P''_{n-1} = n(P_n - xP_{n-1}) \\ (5) \qquad & xP'_n = P'_{n-1} + nP_n \end{array}$$

8. Déduire des formules (4) et (5) la relation :

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0$$

Partie III

1. Soit $I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx$.
   (a) Démontrer que $(2n+1)I_n = -2nI_{n-1}$
   (b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

2. En supposant la formule de la partie I établie, déduire la valeur de :

$$L_n = \int_a^b Q(x)\frac{d^nF_n(x)}{dx^n}dx \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)dx$$

   où $Q(x)$ est un polynôme de degré inférieur à n strictement.

3. Quelle est la valeur de $\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 dx$?

PROBLEME II

I)

k étant une constante réelle, positive ou nulle, on considère la fonction $f(t) = t^k e^{-t}$ de la variable t.

1. Etudier cette fonction pour $t \geqslant 0$.

2. Construire sa représentation graphique C. On construira les divers modèles des courbes C sur une même figure.

3. On considère l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.
   On supposera cette intégrale convergente.
   (a) Trouver une relation de récurrence entre I_k et I_{k-1}.
   (b) Calculer explicitement I_k en fonction de k lorsque k est un entier naturel.

II)

On considère l'ensemble E_2 des polynômes en x, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2 : $p(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2$.

A tout polynôme p, on associe la matrice $P = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

1. La fonction de la variable réelle x :

$$p_1(x) = \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) e^{-t} p(t) dt$$

   est un polynôme de E_2.
   Montrer que la matrice P_1 associé à p_1 peut se mettre sous la forme d'un produit matriciel $P_1 = AP$. Calculer la matrice A.

2. Déterminer les valeurs propres de A.

3. Déterminer les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

4. s étant une constante réelle donnée non nulle; déterminer les polynômes p de E_2 tels que $p_1 = sp$.
   On discutera selon les valeurs de s et on donnera dans chaque cas l'expression explicites des polynômes p.