ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE

OPTION : GENERALE

EXERCICE I

u et v étant deux paramètres non nuls et a une constante réelle non nulle, on définit une matrice A telle que

$$A(u,v) = \begin{pmatrix} u-a & a \\ u-v-a & v+a \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que A est une matrice inversible.

2. Démontrer que $A(u,v) \times A(u',v') = (u+v')A(\frac{uu'}{u+v'}, \frac{vv'}{u+v'})$ si $u+v' \neq 0$.

3. On suppose $u \neq v$.

   (a) Déterminer les valeurs propres de A et ses vecteurs propres.

   (b) Diagonaliser A, c'est-à-dire trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

   (c) En déduire que :

   $$A^n = \frac{1}{(v-u)(v^n-u^n)} A\left(\frac{u^n(v-u)}{v^n-u^n}, \frac{v^n(v-u)}{v^n-u^n}\right)$$

   (d) Si $u = v$, calculer A^n en écrivant A sous la forme

   $$A = uI + aN \text{ où } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N \text{ est une matrice que l'on déterminera.}$$

EXERCICE II

I)

On considère une urne contenant deux sortes de boules :
Des boules blanches en proportion p $(0 < p < 1)$ et des boules noires en proportion $q = 1-p$.
Soit l'expérience aléatoire consistant à tirer des boules une à une en remettant à chaque fois la boule tirée; on note X_r le rang d'apparition de la $r^{ième}$ boule blanche.

1. Montrer que $P(X_1 = n) = pq^{n-1}$.

2. Calculer $P(X_r = n)$ pour tout entier $r \geqslant 1$.

3. La fonction $f(n) = P(X_r = n)$ est une loi de probabilité admettant une espérance mathématique $E(X_r)$.

   (a) Vérifier que $nC_{n-1}^{r-1} = rC_n^r$.

   (b) En admettant que la série de terme général $u_n = C_n^r x^{n-r}$ converge pour $x \in [0,1[$ et que $\sum\limits_{n=r}^{+\infty} u_n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$, calculer $E(X_r)$.

II)

On lance une fusée vers Neptune et on suppose que la probabilité de succès est 0,7. On décide alors de lancer des fusées jusqu'à ce que trois succès soient enregistrés.
Calculer la probabilité pour que cela nécessite moins de dix essais.

EXERCICE III

Jeu d'échec : jouer, consiste pour les deux adversaires, à manoeuvrer chacun son tour une pièce de l'échiquier. Un coup est alors l'ensemble d'un mouvement du joueur A suivi du mouvement du joueur B. Une partie jouée en "n" coups signifie que l'un des joueurs a gagné lors du $n^{ième}$ coup.
On suppose alors que la répartition des nombres de coups X des parties d'un certain tournoi d'échecs est représentée par une fonction de répartition F d'une loi de probabilité dont la densité f est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{a^{3/2}}{x^{3/2}} & \text{si } x \geqslant a \\ f(x) = 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

a représente le nombre minimal de coups joués au cours d'une partie du tournoi.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer F. Tracer les graphes de f et F.
3. En déduire qu'au dessus d'une certaine valeur x, le nombre y de parties jouées en un nombre de coups supérieur à x décroit selon la formule $y = \dfrac{k}{x^{3/2}}$, k étant une constante.
4. Déterminer la valeur du nombre de coups $E(x)$ espéré..
5. Calculer la probabilité $p(X < M/x \geqslant m)$ que le nombre de coups joués soit strictement inférieur à M sachant qu'il est supérieur à m.