ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : GENERALE

PROBLEME I :

On considère E l'espace vectoriel réel des fonctions numériques de la variable réelle et on désigne par E_1 le sous-ensemble de E dont les éléments sont les fonctions f, définies et continues sur $\mathbb{R}$, telles que l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{x} e^t f(t)dt$ soit convergente pour tout x réel.

1. Montrer que E_1 définit un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère l'application u de E_1 dans E qui à toute fonction f de E_1 fait correspondre une fonction F_f définie par :
$$e^x F_f(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^t f(t)dt \text{ pour } x \text{ réel.}$$
Montrer que u est une application linéaire. Est-elle injective ?
3. Montrer que toute fonction F_f ainsi définie est dérivable. Déterminer alors une relation entre la dérivée F_f' et les fonctions F_f et f.
4. Si une fonction f de E_1 est bornée et continûment dérivable, montrer que sa dérivée f' appartient à E_1 et que $u(f') = (u(f))'$ c'est-à-dire : $F_{f'} = (F_f)'$.
5. Quelles sont les fonctions f de E_1 satisfaisant à : $u(f) = F_f = af$, où a est un paramètre réel strictement positif ?
6. On considère E_2 l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n (n est un entier naturel donné).
Montrer les inclusions : $E_2 \subset E_1$ et $u(E_2) \subset E_2$.
On désigne par v la restriction de l'application u à l'ensemble E_2.
Ecrire la matrice de cette application; la base de E_2 étant l'ensemble des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n+1}$ telles que :
$$\varphi_1(x) = x^n, \quad \varphi_2(x) = x^{n-1}, ..., \varphi_n(x) = x, \quad \varphi_{n+1}(x) = 1$$
Montrer que $v(E_2) = E_2$.
Calculer les valeurs propres de cette matrice; les fonctions propres correspondantes.

PROBLEME II

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I

On désigne par f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ pour tout entier naturel non nul n par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \geqslant -n \\ f_n(x) = 0 & \text{si } x < -n \end{cases}$$

1. Etudier et représenter sur un même graphique les fonctions f_1, f_2, f_3.

2. Etudier la continuité de f_n sur $\mathbb{R}$ pour tout entier naturel non nul n.

3. Déterminer pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

4. Plus généralement, on considère une suite réelle (a_n) telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$.

   Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(e^{-a_n}(1+\dfrac{a_n}{n})^n\right) = 1$.

5. On définit la fonction H_x par : $H_x(t) = \left(1+\dfrac{x}{t}\right)^t$, $x \neq 0$ fixé, pour $t > 0$ et dans le cas $x < 0$ pour $t > -x$.

   (a) Montrer que la dérivée $H'_x(t)$ peut s'écrire :

$$H'_x(t) = H_x(t).G(\frac{x}{t}), \quad \text{avec} \quad G(\frac{x}{t}) = \ln(1+\frac{x}{t}) - \frac{\frac{x}{t}}{1+\frac{x}{t}}$$

   (b) Etudier le signe de la fonction $G(u)$ lorsque $u \in]-1, +\infty[$.

   (c) En déduire les tableaux de variations de $H_x(t)$ selon le signe de x.

6. En déduire que pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, on a : $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.

7. Pour tout entier naturel non n, démontrer que :

$$x \neq 0 \text{ tel que } x \geqslant -n \quad (1+\frac{x}{n})^n < e^x$$
$$x \neq 0 \text{ tel que } x \leqslant n \quad (1-\frac{x}{n})^n < e^{-x}$$

Partie II

On pose $I_n = \int\limits_0^{n^2} \left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{n}\right)^n dx$ et $J_n = \int\limits_0^{+\infty} \left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{n}\right)^{-n} dx$

1. Pour quelle valeurs de n, l'intégrale J_n converge-t-elle ?

2. Démontrer que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ converge.

3. En admettant le résultat de la question I)7), démontrer que : $I_n \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx \leqslant J_n$.

4. En effectuant les changements de variables respectifs $X = 1-\dfrac{\sqrt{x}}{n}$ et $Y = 1+\dfrac{\sqrt{x}}{n}$, calculer I_n et J_n.

5. En déduire la valeur de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$.

6. (a) Calculer directement $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ au moyen d'un changement de variable.

   (b) Plus généralement, calculer directement $\int\limits_0^{+\infty} \exp(-x^{1/k})dx$, pour k entier naturel non nul, par un procédé analogue.