ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE

OPTION : GENERALE (durée 2h)

EXERCICE I :

On considère deux urnes A et B contenant des boules blanches et des boules noires. L'urne A contient des boules blanches en proportion a $(0 < a < 1)$; l'urne B contient des boules blanches en proportion b $(0 < b < 1)$.
On effectue N tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne d'où elle provient; et ceci de la façon suivante :

- On commence par choisir l'une des deux urnes (chaque urne a la même probabilité d'être choisie), puis on tire une boule :
  - Si elle est blanche, on tire la boule suivante dans le même urne.
  - Si elle est noire, on tire la boule suivante dans l'autre urne.
- On continue suivant la même règle jusqu'au $N^{ième}$ tirage.

Soit $1 \leqslant n \leqslant N$, on note :
P_n : probabilité d'obtenir une boule blanche au $n^{ième}$ tirage.
Q_n : probabilité pour que le $n^{ième}$ tirage soit effectué dans l'urne A.

1. Calculer P_1, Q_2 puis P_2.
2. Déterminer une relation liant Q_n et Q_{n-1} $(2 \leqslant n \leqslant N)$.
3. On définit x par : $x = (a + b - a)x + 1 - b$.
   Montrer que la suite (U_n) de terme général $U_n = Q_n - x$ pour $n \geqslant 1$ est une suite géométrique de raison $a + b - 1$.
4. En déduire l'expression de Q_n en fonction de a, b et n.
5. Déterminer l'expression de P_n en fonction de a, b et n.

EXERCICE II

Une enquête statistique chez 1 000 commerçants porte sur le nombre d'heures d'ouverture hebdomadaire ainsi que sur le nombre d'employés. On a obtenu les résultats suivants :

Nombres d'employés y_i	Nombres d'heures d'ouverture par classe	Centre de classe x_i	Nombre de commerçants n_i
0	[30,35[	32,5	50
1	[35,37[	36	100
2	[37,39[	38	200
3	[39,40[	39,5	150
4	[40,41[	40,5	120
5	[41,43[	42	n_6
6	[43,45[	44	130
7	[45,50[	47,5	n_8

I)

On considère la distribution des heures d'ouverture (colnne 2,3 et 4 du tableau des résultats).

1. Déterminer les valeurs des effectifs n_6 et n_8 sachant que le nombre moyen d'heures d'ouverture hebdomadaire est égal à 40,38 h.

2. Calculer la médiane et l'écart-type de cette distribution.

3. Le $250^{ième}$ établissement qui a le moins d'heures d'ouverture reste ouvert 38 h par semaine. Quelle est la durée d'ouverture du $250^{ième}$ établissement qui a le plus d'heures d'ouverture ?

II)

On utilise maintenant toutes les informations du tableau initial. On fournit les calculs suivants

$$\sum_i n_i y_i = 3660 \qquad \sum_i n_i y_i^2 = 17500 \qquad \sum_i n_i x_i y_i = 155085$$

1. Calculer les coefficients de corrélation linéaire entre le nombre d'heures d'ouverture (x) et le nombre d'employés (y).

2. Un commerçant souhaite rester ouvert pendant 56 heures chaque semaine, quelles estimations peut-il faire sur le nombre d'employés nécessaires à la bonne marche du magasin ?

EXERCICE III

Préliminaires

La résolution numérique d'un système linéaire $AX = b$ où A désigne la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ peut s'effectuer par méthode itérative (dans le cas général d'un grand nombre d'équations par exemple).

Elle consiste à déterminer par un procédé de calcul une suite de valeurs $X_p = \begin{pmatrix} x_{1,p} \\ x_{2,p} \\ \vdots \\ x_{n,p} \end{pmatrix}$ à partir d'une valeur initiale

X_0 telle que $\lim\limits_{p\to+\infty} X_p = X$ où X est la solution du système.
On arrête les calculs lorsque la précision désirée est atteinte. Lorsque cette limite existe, la méthode sera dite convergente, sinon elle sera divergente.
Les méthodes classiques consistent à poser pour tout entier $p \geqslant 1$: $BX_p = CX_{p-1} + b$ où B et C sont des matrices carrées convenablement choisies et telles que B soit inversible.
On déduit $X_p = KX_{p-1} + W$; où $K = B^{-1}C$ et $W = B^{-1}b$.

1. Exprimer X_p où $p \geqslant 1$ en fonction de X_0, X_1, et des matrices K, K^2, ..., K^{p-1}.
   On admettra à partir de là, que la méthode itérative choisie est convergente si et seulement la plus grande valeur propre de K est en valeur absolue inférieure à 1.

LE BUT DE L'EXERCICE EST DE COMPARER SUR DEUX EXEMPLES SIMPLES LA METHODE DE GAUSS-SEIDEL ET LA METHODE DE JACOBI

NOTATIONS :

$A = D - E - F \qquad$ Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, on pose

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

METHODE DE GAUSS-SEIDEL : On choisit $B = D - E$ et $C = F$
METHODE DE JACOBI : On choisit $B = D$ et $C = E + F$

I)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer pour cette matrice A, la matrice K définie dans les préliminaires :
   (a) Pour la méthode de Gauss-Seidel
   (b) Pour la méthode de Jacobi.
2. Déterminer les valeurs propres de ces matrices.
3. Vérifier que la méthode de Gauss-Seidel diverge tandis que la méthode de Jacobi converge.

II)

On considère la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & 1 & 0 \\ 0 & -m_3 & 1 \end{pmatrix}$ où m_1, m_2, m_3 sont des nombres réels non nuls.

1. Déterminer pour quelles valeurs de m_1, m_2, m_3 la méthode de Gauss-Seidel pour A' converge.
2. Même question avec la méthode de Jacobi.