ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : GENERALE

PROBLEME I

On considère l'ensemble E des matrices carrées d'ordre 2, symétriques, à coefficients réels ou complexes.
On désigne par F le sous-espace de E formé par les matrices M de E telles que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ avec <u>a non nul</u>.
A chaque matrice M de E, on associe le polynôme P_M définie pour tout x par ;

$$P_M(x) = ax^2 + 2bx + c$$

1. Caractériser les fonctions polynômes, associées aux matrices inversibles de F.
   Si M est inversible et M^{-1} son inverse, déterminer $P_{M^{-1}}$

2. (a) Déterminer le sous-ensemble C de E formé par les matrices telles que le produit de deux matrices de C appartient à E.

   (b) Montrer que C est formé de sous-ensembles E_∞, E_0, E_k $(k \in \mathbb{R}^\times)$ tels que :
   - Si M est un élément de $E_\infty \cap F$, $P_M(x) = 0$ a deux racines opposées.
   - Si M est un élément de $E_0 \cap F$, $P_M(x) = 0$ a deux racines inverses.
   - Si M est un élément de $E_k \cap F$, les racines x_1 et x_2 de l'équation $P_M(x) = 0$ vérifient :

   $$\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 + x_2} = k \text{ avec } k \neq 0.$$

   (c) A chaque valeur de k correspond un ensemble E_k constitué de matrices notées M_k. Déterminer l'expression générale de ces matrices M_k en fonction de trois paramètres a, b, l.

3. On considère maintenant les matrices M_k de E_k, où k est égal à $\operatorname{sh}\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}^\times)$ et où a et b sont deux réels non nuls.
   On rappelle que $\operatorname{sh}\alpha = \dfrac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$.

   (a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices M_k ainsi définies.

   (b) Pour tout entier n non nul, on considère la puissance $n^{ième}$ de M_k : M_k^n.
   Sous quelles conditions, l'équation $P_{M_k^n}(x) = 0$ admet-elle deux racines réelles ?
   Former l'équation $P_{M_k^n}(x) = 0$ pour $a = b = 1$ et $n = 2p$ et calculer ses racines.

4. Dans cette question, k est un paramètre fixé. A toute matrice inversible

   $$N_k = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u - 2kv \end{pmatrix} \quad (u \neq 0),$$

   on associe l'application h_{N_k} de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, qui à x fait correspondre y tel que :

   $$y = h_{N_k}(x) = \frac{ux + v}{vx + u - 2kv}.$$

   (a) Soient deux matrices inversibles N_k et N'_k de la forme définie ci-dessus. Comparer $h_{N_k} \circ h_{N'_k}$ et $h_{N_k N'_k}$.
   Comparer $h_{N_k^{-1}}$ et l'application réciproque de h_{N_k}.

   (b) Soit M_k une matrice inversible de $E_k \cap F$, et x une racine de l'équation $P_{M_k}(x) = 0$.
   Quelle équation vérifie alors $y = h_{M_k}(x)$?

PROBLEME II

On considère la famille de fonctions $f_\alpha(x)$ définies pour tout réel x strictement positif par :

$$f_a(x) = x^{1-x^\alpha} \qquad \text{où } \alpha \text{ désigne un paramètre réel.}$$

On note C_α la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormé du plan.

1. Etudier les variations de f_α.
2. Déterminer $\lim f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α peut-elle être prolongée par continuité au point $x = 0$?
   La fonction prolongée admet-elle une dérivée à droite au point $x = 0$?
3. Etudier la branche infinie de C_α lorsque x tend vers $+\infty$.
4. On suppose dans cette question que x est un réel strictement positif fixé. $f_\alpha(x)$ est alors une fonction de α avec x pour paramètre, soit $g_x(\alpha)$.
   (a) Etudier la fonction g_x et tracer dans un repère orthonormé dans les représentations graphiques de g_x selon de x.
   (b) Déterminer l'ensemble des points du plan tels que chacun d'eux appartient à au moins une courbe C_α.
   (c) Déterminer les points communs à deux courbes C_α et C_β distinctes.
5. Déduire de l'étude précédente les différentes formes des courbes C_α suivant la valeur de α et construire dans un même repère une courbe de chaque forme.