ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE (ISC)

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : GENERALE

EXERCICE 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

1. Déterminer par la méthode du pivot les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
   f est-elle diagonalisable ?

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n. Le résultat obtenu est-il valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

3. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les vecteurs propres de f sont aussi vecteurs propres de g. En déduire, à l'aide de leurs matrices relativement à $\mathcal{B}$, tous les endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

4. A l'aide de la question précédente, déterminer tous les endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g \circ g = f$.

EXERCICE 2

On dispose de deux urnes U et V. La première contient b boules blanches et n boules noires et la seconde contient n boules blanches et b boules noires (b et n sont des entiers strictement positifs tels que $b \neq n$).

A)

On se propose d'effectuer une succession de tirages au hasard et AVEC REMISE (dans la même urne) d'une boule de l'une de ces deux urnes. On note U_k l'évènement " le $k^{ième}$ tirage a lieu dans l'urne U " et B_k " le $k^{ième}$ tirage amène une boule blanche ".

1. Dans cette question, le premier tirage s'effectue dans U et, à partir de ce moment, si à une certaine étape, le tirage amène une boule blanche, alors le tirage suivant s'effectue dans l'urne U, sinon le tirage s'effectue dans l'urne V.

   (a) Pour k appartenant à $\mathbb{N}^{\times}$, déterminer une relation entre la probabilité de l'évènement B_{k+1} et la probabilité de l'évènement B_k.

   (b) Quelle est la limite lorsque k tend vers l'infini de la probabilité de l'évènement B_k ?

2. Dans cette question, le premier tirage s'effectue encore dans U et si à un certain moment on obtient une boule blanche, alors le tirage suivant s'effectue dans la même urne, tandis que si l'on obtient une boule noire, alors le tirage suivant s'effectue dans l'autre urne.
   Pour k appartenant à $\mathbb{N}^{\times}$, déterminer la probabilité de l'évènement B_k.

3. Quelle est, à long terme, la meilleure de ces deux stratégies, si l'objectif est d'obtenir des boules blanches ?

B)

Dans cette partie, on suppose $b = 2$ et on effectue une succession de tirages SANS REMISE d'une boule de l'urne U, jusqu'à obtenir les deux boules blanches. On note X (respectivement Y) le rang aléatoire d'apparition de la première (respectivement la seconde) boule blanche.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^{\times}$, rappeler les valeurs de $\sum\limits_{i=1}^{k} i$, $\sum\limits_{i=1}^{k} i^2$ et montrer que $\sum\limits_{i=1}^{k} i^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$.
2. Quelle est la loi de X ? Déterminer son espérance et sa variance.
3. Quelle est la loi de Y ? Déterminer son espérance.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

PROBLEME

PREMIERE PARTIE

1. Pour tout entier naturel non nul n, on définit les fonctions
$$f_n(x) = \exp(\frac{x^2}{n}) - 1 - \frac{x^2}{n}; \quad g_n(x) = \exp(-\frac{x^2}{n}) - 1 + \frac{x^2}{n}.$$
(exp désignant la fonction exponentielle de base e, $\exp(u)$ se notant aussi e^u).
Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de ces fonctions.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \int\limits_0^{\pi/2} |\cos x|^n \, dx$.

   (a) Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a : $(n-1)W_{n-2} = nW_n$. En déduire, selon la parité de n, la valeur de W_n.

   (b) Montrer que nW_nW_{n-1} ne dépend pas de la valeur de l'entier naturel non nul n.

   (c) Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a : $0 < W_n \leqslant W_{n-1} \leqslant W_{n-2}$. En déduire la limite de $\dfrac{W_{n-1}}{W_n}$ lorsque n tend vers l'infini.

   (d) Déduire de c) que W_n admet un équivalent de la forme $\dfrac{\lambda}{\sqrt{n}}$, lorsque n tend vers l'infini, et préciser la valeur de λ.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
$$I_n = \int\limits_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int\limits_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n} dx$$

   (a) Justifier la convergence de l'intégrale I_n.

   (b) Montrer que $J_n \leqslant \int\limits_0^{\sqrt{n}} \exp(-x^2)dx \leqslant \int\limits_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \leqslant I_n$.

   (c) Transformer I_n à l'aide du changement de variable : $x = \sqrt{n}\tan(t)$ et J_n à l'aide du changement de variable : $x = \sqrt{n}\sin(t)$. En déduire que les intégrales I_n et J_n ont une même limite lorsque n tend vers l'infini.

4. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale : $\int\limits_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx$, puis de l'intégrale
$$K = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})dx.$$

DEUXIEME PARTIE

1. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Justifier la convergence de cette intégrale.

   Calculer $\Gamma(1)$ et, à l'aide du résultat I)4), déterminer la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

2. Montrer que l'on a : $\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{n}{2})$, en distinguant selon la parité de l'entier naturel n.

3. (a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{matrix} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(x)}e^{-t}t^{x-1} & \text{si } t > 0 \end{matrix}$

   (x est ici un paramètre strictement positif)
   Vérifier que f est une densité de probabilité.

   (b) Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité. Montrer que X admet des moments de tous ordres et déterminer ses moments non centrés.

4. On suppose que, pour tout nombre réel positif t, le nombre aléatoire de véhicules passant à un péage d'autoroute entre les instants 0 et t, suit une loi de Poisson de paramètre t. Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on note Y_n l'instant aléatoire où passe le $n^{ième}$ véhicule (le comptage commençant à partir de l'instant 0).
   Déterminer la fonction de répartition de Y_n et en déduire la loi de Y_n. Préciser espérance et variance de Y_n.