ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE

OPTIONS : SCIENTIFIQUE - ECONOMIQUE - TECHNOLOGIQUE

EXERCICE 1

Une urne contient a boules blanches et n boules noires. Dans tout l'exercice, a est un entier fixé supérieur ou égal à 1 et n un entier naturel.
Un joueur tire des boules au hasard dans l'urne, l'une après l'autre. Lorsqu'une boule a été tirée, elle n'est pas remise dans l'urne.
On désigne par X_n la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première boule blanche.

1. Quel est, en fonction de n, l'ensemble des valeurs de la variable X_n ?
2. On suppose $n \geqslant 1$. Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.
3. (a) Expliciter soigneusement l'évènement $(X_n = k)$. En déduire la loi de la variable X_n.
   (b) Démontrer, pour $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 1$, la formule :
   $$P(X_{n+1} = k+1) = \frac{n+1}{a+n+1} P(X_n = k)$$
   X_{n+1} : nombre de tirages nécessaires pour l'obtention d'une première boule blanche, l'urne contenant a boules blanches et $n+1$ boules noires.
4. $E(X_n)$ désigne l'espérance mathématique de X_n.
   (a) Calculer $E(X_0)$, $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
   (b) Pour $n \geqslant 0$, établir la relation :
   $$E(X_{n+1}) = \frac{n+1}{a+n+1} E(X_n) + 1$$
   (c) En déduire $E(X_n)$ en fonction de a et de n.

EXERCICE 2

On considère la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et définie pour $x \neq 0$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

1. (a) Calculer $f(0)$ et étudier la dérivabilité de f en 0.
   (b) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a :
   $$0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$
2. Pour tout entier naturel n, on pose :
   $$I_n = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx$$
   (a) Montrer que cette intégrale est convergente.

(b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n}$.
En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

3. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a :

$$f(x) = f(x)e^{-nx} + \sum_{k=1}^{n} x.e^{-kx}$$

En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

EXERCICE 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer A^2 et A^3.
Montrer que $A^3 - 3A + 2I = 0$.
On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

2. Soit n un entier naturel. Montrer que A^n est de la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$$

où a_n est un entier relatif.
Démontrer la relation $a_{n+1} = 3 - 2a_n$.
En déduire l'expression de A^n en fonction de a_n.

3. La formule donnant A^n est-elle encore valable si n est un entier relatif ?