ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : GENERALE

EXERCICE 1

Pour n entier naturel, on désigne par E_n l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} = 0$ (fonction nulle), où $f^{(0)} = f$ et où, pour $k \geqslant 1$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{ième}$ de f, le coefficient binômial C_n^k ayant sa signification habituelle.

1. Montrer que pour tout n entier naturel, E_n est un espace vectoriel.
2. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x f(x)$.
   (a) Montrer que : $f \in E_n \Rightarrow g^{(n)} = 0$
   (b) Pour $n > 0$ et k entier tel que $0 \leqslant k < n$, on désigne par f_k la fonction définie par $f_k(x) = x^k e^{-x}$. Prouver que la famille $(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ est une base de E_n.
3. Dans cette question, $n = 4$ et B désigne la base (f_0, f_1, f_2, f_3) de E_4.
   (a) Montrer que l'application ϕ définie sur E_4 et qui, à toute fonction f associe la fonction $h = \phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$h(x) = xf(x) + xf'(x) - f''(x),$$
   est un endomorphisme de E_4.
   (b) Déterminer la matrice A de ϕ relativement à B. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs colonnes propres de A. ϕ est-elle surjective ?

EXERCICE 2

Trois joueurs A, B, C s'affrontent simultanément dans un jeu. Les manches de ce jeu sont indépendantes et pour chaque manche, il n'y a qu'un vainqueur possible. A et B sont de même force et gagne chacun chaque manche avec la probabilité p, avec $0 < p < \frac{1}{2}$.
Est déclaré vainqueur de ce jeu le premier qui gagne deux manches consécutives.

1. (a) Quelle est la probabilité que A (respectivement B, C) gagne le jeu à l'issue de la seconde manche ?
   (b) Quelle est la probabilité que le jeu comporte au moins trois manches ? Quelle est la probabilité que A gagne à l'issue de la troisième manche ?
2. Pour $n \geqslant 1$, soit A_n (respectivement B_n, C_n) l'évènement : " le jeu n'est pas achevé avant la $n^{ième}$ manche, la $n^{ième}$ manche est gagnée par A (respectivement B, C) et le jeu continue ".
   (a) Calculer $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(C_1)$, $P(A_2)$, $P(B_2)$, $P(C_2)$.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, on a :
   $$\begin{cases} p(A_{n+1}) & = & p.(p(B_n) + p(C_n)) \\ p(B_{n+1}) & = & p.(p(A_n) + p(C_n)) \\ p(C_{n+1}) & = & (1-2p).(p(A_n) + p(B_n) \end{cases}$$

(c) En déduire que l'on a, pour tout entier n : $p(A_n) = p(B_n)$ et déterminer une de récurrence liant les nombres $p(A_{n+2})$, $p(A_{n+1})$, $p(A_n)$.

3. On suppose dans cette question que l'on : $p = 0,2$.

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, calculer $p(A_n)$ en fonction de n.

   (b) En déduire $p(C_n)$.

   (c) Calculer la probabilité que le jeu ne soit pas achevé à l'issue de la $n^{ième}$ manche et déterminer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

   (d) Pour $n \geqslant 2$, calculer la probabilité que A gagne le jeu à l'issue de la $n^{ième}$ manche. En déduire la probabilité que A soit déclaré vainqueur. Quelle est la probabilité que C soit déclaré vainqueur. Déterminer la loi de X.

PROBLEME

A condition d'admettre les résultats donnés dans l'énoncé, les différentes parties de problème sont très largement indépendantes.

PARTIE I

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = e^{-x} \sin^2 x$.

1. (a) Déterminer les variations de g.

   (b) Tracer sur un même repère les courbes d'équations $y = g(x)$ et $y = e^{-x}$. (On se limitera à x compris entre 0 et 2π).

2. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{n\pi} g(x)dx \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n} e^{-k\pi}.$$

   (a) Exprimer (u_n) et (v_n) en fonction de n.

   (b) Etudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

PARTIE II

Soit f une fonction continue et décroissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. On définit la fonction h sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = f(x) \sin^2 x$.

On pose $I_k = \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} h(x)dx, \quad u_n = \int\limits_0^{n\pi} h(x)dx \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\pi}{2} \sum\limits_{k=0}^{n} f(k\pi)$

1. (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\pi}{2} f((k+1)\pi) \leqslant I_k \leqslant \frac{\pi}{2} f(k\pi)$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) converge si et seulement si la suite (v_n) converge.

2. Montrer que les intégrales $\int\limits_0^{+\infty} h(x)dx$ et $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature (c'est-à-dire, sont toutes deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

PARTIE III

1. Montrer que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ convergent.

   On considère la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}\left(1 + \frac{\sin x}{\ln(x+1)}\right)$.

2. (a) Montrer, qu'au voisinage de l'infini, $\varphi(x)$ est équivalente à $\frac{\sin x}{x}$.

   (b) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(1+x)}$ diverge.

   (c) On considère la fonction ψ définie sur $]0, +\infty[$ par : $\psi(x) = \frac{\sin^2 x}{x\ln(x+1)}$.

   Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \psi(x)dx$ diverge.

   (d) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(x)dx$ diverge. Quelle conclusion peut-on tirer de la comparaison des résultats obtenus en III. 1), 2)a) et d) ?

PARTIE IV

Compte-tenu du résultat obtenu en III. 1), dire pourquoi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ est convergente.
On se propose, dans cette partie, de donner la valeur F de cette intégrale :

1. Soit μ une fonction réelle de classe C^1 sur le segment $S = [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour tout entier naturel k, on pose : $a_k = \int_0^{\pi/2} \mu(x)\sin(kx)dx$.

   Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'on a : $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment S et que cette fonction ainsi prolongée est de classe C^1 sur S.

3. Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2k+1)x)}{\sin x}dx = \frac{\pi}{2}$ (on indiquera pourquoi cette intégrale existe).

   En déduire que l'on a : $\lim_{k\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2k+1)x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ et donner alors la valeur de F.