

MATHÉMATIQUES 2^{ème} ÉPREUVE

OPTIONS : SCIENTIFIQUE - ECONOMIQUE - TECHNOLOGIQUE

EXERCICE 1

Soient f et g les fonctions réelles définies par :

$$f(x) = -x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

1. Étudier ces deux fonctions : domaines de définition, dérivées, tableaux de variation et études des branches infinies.
2. Étudier la position relative des deux courbes représentatives ; montrer en particulier que pour tout réel x de l'intervalle $]0; 1[$, on a : $0 \leq f(x) \leq g(x)$.
3. Construire dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et de g .
(On prendra 4 cm comme unité sur chaque axe.)
4. Soit x un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

(a) calculer $I(x) = \int_0^x f(t) dt$.

(b) Déterminer la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 1^- .

5. Pour tout entier naturel non nul n on pose :

$$a_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n e^{\frac{1}{12n}}$$

(a) Établir que pour un certain réel x que l'on déterminera on a :

$$\ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad \ln \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} \right) = \frac{1}{x} (f(x) - g(x))$$

- (b) En déduire que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite l vérifiant : $0,39 < l < 0,4$.
On démontre et l'on admettra que $l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
Déduire de ce qui précède un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 7 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer par la méthode du pivot de Gauss trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vérifiant $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et tels que, pour $i = 1, 2, 3$, la matrice $A - \lambda_i I$ ne soit pas inversible.

2. On pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P dont la première ligne est constituée de 1 ou de 0, telle que :

$$A = P D P^{-1}$$

3. (a) Calculer P^{-1} .
(b) Soit n un entier naturel non nul. Expliciter la matrice $B_n = 4.A^{n-1}$.
(On notera que cette matrice est à coefficients entiers.)
4. Dans un pays, il y a trois chaînes de télévision : la **1**, la **2** et la **3**.
- Si une personne regarde la **1** un soir, elle choisit le lendemain la **1**, la **2** ou la **3** au hasard.
 - Si elle regarde la **2**, alors le lendemain elle reste fidèle à la **2**.
 - Si elle regarde la **3**, alors elle choisit le lendemain : la **3** avec une probabilité $1/3$, la **1** avec une probabilité $1/12$ et la **2** avec une probabilité $7/12$.

Une personne achète un jour un poste de télévision et regarde ce soir-là une chaîne au hasard.

On note p_n, q_n, r_n , les probabilités pour que cette personne regarde la **1**, la **2** ou la **3** le n -ème soir.

- (a) Montrer que : $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12^n} B_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ où B_n est la matrice calculée au **3. b**.
- (b) Déterminer les probabilités pour que cette personne regarde la **1**, la **2** ou la **3** le n -ème soir et les limites de ces probabilités lorsque $n \rightarrow +\infty$.