ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : SCIENTIFIQUE

EXERCICE 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ étant rapporté à sa base canonique, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à A.
I désigne la matrice unité d'ordre 4.

1. (a) Déterminer les valeurs propres de f.
   (b) Déterminer les vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   Le détail de la méthode utilisée et les principales étapes de calcul devront figurer sur la copie

2. On considère les vecteurs $\varepsilon_1 = (1,1,0,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1,1)$.
   (a) Déterminer des vecteurs ε_2 et ε_4 vérifiant les conditions suivantes :
   $$f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1, \quad f(\varepsilon_4) = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \text{ est une base } \mathcal{B}' \text{ de } \mathbb{R}^4.$$
   (b) Quelle est la matrice A' de f relativement à $\mathcal{B}'$?
   (c) Calculer $(A')^n$, pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$. En déduire A^n.

EXERCICE 2

1. Pour $x \in]0,1[$ et m entier, on pose $f_m(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^m = \sum_{k=0}^{m} x^k$.
   (a) Donner une expression simplifiée de $f_m(x)$ et en déduire $\lim_{m \to +\infty} f_m(x)$.
   (b) Donner de même une expression de $f'_m(x)$, $f''_m(x)$ (où f'_m et f''_m désignent les deux premières dérivées de la fonction f_m), et en déduire $\lim_{m \to +\infty} f'_m(x)$, $\lim_{m \to +\infty} f''_m(x)$.
   (c) Indiquer comment on démontrerait que l'on a :
   $$\forall l \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=l}^{+\infty} C_k^l x^{k-l} = \frac{1}{(1-x)^{l+1}}.$$
   (le coefficient binomial C_k^l, que l'on pourra noter $\binom{k}{l}$, ayant sa signification habituelle).

Une urne contient des boules de trois catégories, indiscernables au toucher : des boules rouges en proportion p_1, des boules bleues en proportion p_2 et des boules incolores en proportion p_3, avec : p_1, p_2, $p_3 \in]0,1[$ (On pourra poser $p_1 + p_2 = 1 - p_3 = q$)
On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en notant à chaque fois la nature de la boule obtenue, et en la replaçant dans l'urne avant le tirage suivant.

2. Soit X_1 la variable aléatoire de tirages juste nécessaire pour obtenir, pour la première fois, une boule incolore. Déterminer la loi de X_1 et vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) = 1$. Préciser l'espérance et la variance de X_1.

3. Soit X_2 le nombre de tirages juste nécessaire pour obtenir, pour la deuxième fois, une boule incolore.

   (a) Déterminer la loi de X_2. Vérifier que $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X_2 = k) = 1$.

   (b) On écrit $X_2 = X_1 + Y$, où Y est le nombre aléatoire de tirages juste nécessaire, à partir de l'obtention de la première boule incolore, pour obtenir une deuxième boule incolore. Quelle est la loi de Y ? Calculer l'espérance de X_2

4. Dans cette question, on effectue des tirages jusqu'à l'obtention d'une première boule incolore et on note Z le nombre aléatoire de boules rouges obtenues avant cette première boule incolore.
   Déterminer la loi du coupe (X_1, Z).
   En déduire la loi de Z.

PROBLEME

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, on pose : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et $\gamma_n = u_n - \ln n$ (ln désignant la fonction " logarithme népérien ").

1. Montrer que pour tout entier k, au moins égal à deux, on a : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

   En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^\times$: $\ln n \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln n$.

2. Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n>0}$ est monotone, en déduire que cette suite est convergente. Dans toute la suite, sa limite sera notée γ.

3. Pour tout entier k, au moins égal à deux, on pose $v_k = \int_{k-1}^{k} \frac{t-k+1}{t^2} dt$.

   Montrer que : $\forall k \geqslant 2, \quad 0 \leqslant v_k \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

   Montrer que la série de terme général v_k est convergente, et que $\gamma_n - \gamma = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

   En déduire que : $0 \leqslant \gamma_n - \gamma \leqslant \frac{1}{n}$.

4. La convergence de la suite (γ_n) vers γ est donc lente : on se propose d'accélérer cette convergence. Pour cela :

   (a) Montrer, à l'aide d'intégrations par parties, que pour $k \geqslant 2$, on a :

   $$\int_0^1 \frac{x(1-x)(1-2x)}{(x+k-1)^4} dx = 2.v_k + \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right] + \frac{1}{6} \times \left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right].$$

   (b) Montrer que pour $k \geqslant 2$, on a :

   $$\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{(x+k-1)^5} dx = v_k + \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right] + \frac{1}{12} \times \left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right].$$

   (c) On pose $I_k = \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{(x+k-1)^5} dx$

      i. Quel est le maximum de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur le segment $[0, 1]$?

      ii. En déduire que, pour $k \geqslant 2 : 0 \leqslant I_k \leqslant -\frac{1}{64}\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k-1)^4}\right)$.

iii. En conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$: $0 \leqslant \gamma_n - \gamma - \frac{1}{12n} + \frac{1}{12n^2} \leqslant \frac{1}{64n^4}$.

(d) Soit ε un nombre réel strictement positif. Pour quelles valeurs de n peut-on affirmer que $a_n = \gamma_n - \frac{1}{12n} + \frac{1}{12n^2}$ est une valeur approchée de γ avec une erreur inférieure à ε ?

(e) Donner en particulier une valeur approchée de γ, avec une erreur inférieure à 5.10^{-3}.

Partie II

1. Montrer que, pour $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall t \in [0, n], \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.

2. Montrer que, pour $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$, on a : $x - x^2 \leqslant \ln(1+x)$.
   En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 4$ et $t \in [0, \sqrt{n}[\quad : \quad t + n\ln(1 - \frac{t}{n}) \geqslant -\frac{t^2}{n} \geqslant \ln(1 - \frac{t^2}{n})$.
   Puis que : pour $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 4$ et $t \in [0, n] \quad : \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geqslant e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)$.

3. En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad n \geqslant 4, \quad \forall t \in [0, n]$:

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{n}.t^2 e^{-t}.$$

4. (a) Montrer que l'intégrale $K = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t).dt$ est convergente.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on pose $J_n = \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n .\ln(t).dt$.
   On admet que l'on a $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = -\gamma$ (ceci pourrait se démontrer à l'aide d'une intégration par parties et d'un changement de variable, ...)
   A l'aide de la question 3), en déduire que K vaut $-\gamma$