ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1978

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Question préliminaire

X désignant une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs prises est $[\![0, n]\!]$ et, pour tout entier $\in [\![0, n]\!]$, p_i désignant la probabilité de l'événement $(X = i)$, on appelle *fonction génératrice* de la variable aléatoire X, la fonction polynôme F_X définie pour tout nombre réel u par :

$$F_X(u) = \sum_{i=0}^{n} p_i u^i$$

Que vaut $F_X(1)$?

Exprimer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X en fonction de $F'_X(1)$ et $F''_X(1)$ (F'_X et F''_X désignent les dérivées première et seconde de la fonction F_X).

PROBLEME

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels autres que zéro, et l'on note $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au "hasard" et "avec remise" d'une boule, en procédant de la façon suivante :

• lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant ;

• lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée dans cette urne par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant. Ecrire en Pascal un programme qui simule cette expérience et affiche la couleur des 50 premières boules tirées.

PARTIE I

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.

2. Soit Z la variable aléatoire définie à partir de Y par la relation $Z = b+1-Y$ et pour $k \in [\![0, b]\!]$, $\alpha_k = P(Z = k)$.
   Que vaut α_0 ? Montrer que, si $1 \leqslant k \leqslant b$, $\alpha_k = \dfrac{b!}{N^b}\left(\dfrac{N^k}{k!} - \dfrac{N^{k-1}}{(k-1)!}\right)$

3. Soit F_Z la fonction génératrice de Z. Montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad F_Z(u) = \frac{b!}{N^b}(1-u)\left(\sum_{k=0}^{b} \frac{(Nu)^k}{k!}\right) + u^{b+1}$$

   En déduire l'espérance mathématique de Z puis celle de Y.

PARTIE II

Dans cette partie on note :

- pour tout entier $n \geqslant 1$, q_n la probabilité de l'événement, noté N_n : “la n-ième boule tirée est noire” ;
- pour tout entier $n \geqslant 0$, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages ;
- pour tous entiers $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, $P(n, k)$ la probabilité de l'événement : “au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires”.

On remarquera que $P(0, 0) = 1$ et que $P(n, k) = 0$ si $k > \inf(n, b)$.

1. (a) En remarquant que l'événement N_{n-1} et l'événement contraire $\overline{N}_{n-1}$ constituent un système complet d'événements et en utilisant la formule des probabilités totales trouver, pour $n \geqslant 2$, une relation de récurrence entre q_n et q_{n-1}.
   (b) En déduire la valeur de q_n.

2. (a) Que valent $\sum\limits_{k=0}^{n} P(n, k)$; $P(n, 0)$; $P(n, n)$?
   (b) Démontrer, en s'inspirant de la méthode utilisée au **II.1.a** que

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall k \geqslant 1, \quad NP(n, k) = (a+k)P(n-1, k) + (b+1-k)P(n-1, k-1) \qquad (1)$$

   (c) On pose, pour $n \geqslant 0$, $\quad u_n = b + \left(\dfrac{N}{a}\right)^n P(n, 1)$. Utiliser la relation (1) pour exprimer u_n en fonction de u_{n-1}. En déduire la valeur de $P(n, 1)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Montrer que la suite $(P(n, b))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, convergente et que sa, limite ℓ est inférieure ou égale à 1.
   (e) Montrer que la suite $(P(n, b-1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite. Montrer plus généralement que, pour tout entier naturel $k < b$, la suite $(P(n, k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite. En déduire que $\ell = 1$.

3. Dans cette question, on demande de déterminer l'espérance mathématique $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n par les deux méthodes suivantes :

   (a) en remarquant que X_n est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli
   (b) en utilisant la relation, valable pour tout entier n :

$$Nq_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (b-k)P(n, k)$$

   que l'on démontrera en s'inspirant de **II.1.a**. Quelle est la limite de la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?

4. (a) Soit Q_n la fonction génératrice de la variable aléatoire X_n. Démontrer, en utilisant la relation (1) que, pour tout $n \geqslant 1$:
$$NQ_n(u) = (a+bu)Q_{n-1}(u) + u(1-u)Q'_{n-1}(u) \qquad (2)$$
En remarquant que $Q_0(u) = 1$, montrer que la relation (2) permet de déterminer.de proche en proche tous les polynômes Q_n. Ecrire, en particulier Q_1 et Q_2.

(b) En dérivant (2), trouver une relation de récurrence entre $E(X_n)$ et $E(X_{n-1})$. En déduire à nouveau $E(X_n)$.

(c) Déterminer de même une relation de récurrence entre $Q''_n(1)$ et $Q''_{n-1}(1)$ pour $n \geqslant 1$. En déduire que :
$$Q''_n(1) = b(b-1)\left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$$

Calculer enfin $V(X_n)$ variance de la variable aléatoire X_n. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} V(X_n)$?

PARTIE III

Dans ce paragraphe, $\mathbb{R}[u]$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels de la variable réelle u, et pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[u]$ le sous-espace vectoriel formé du polynôme nul et des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que $(1, u, \ldots, u^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[u]$ appelée base canonique de $\mathbb{R}_n[u]$. Enfin, un polynôme de $\mathbb{R}[u]$ sera indifféremment noté A ou $A(u)$.

1. Soit Φ l'application de $\mathbb{R}[u]$ vers lui-même définie par
$$A(u) \longmapsto (a+bu)A(u) + u(1-u)A'(u)$$
Montrer que Φ est linéaire et qu'il existe un entier r *unique* tel que $\mathbb{R}_r[u]$ soit stable par Φ (c'est-à-dire tel que $\Phi(\mathbb{R}_r[u]) \subset \mathbb{R}_r[u]$).
On note, pour cette valeur de r, Φ_r l'endomorphisme de $\mathbb{R}_r[u]$ tel que :
$$\forall A \in \mathbb{R}_r[u], \quad \Phi_r(A) = \Phi(A)$$
Ecrire la matrice B de Φ_r dans la base canonique de $\mathbb{R}_r[U]$.

2. On suppose ici que $b = 2$: chercher les valeurs propres et les polynômes propres de l'endomorphisme Φ_r correspondant à cette valeur de b.

3. On revient au cas général $b \geqslant 1$ et l'on appelle polynôme propre de Φ tout polynôme A non nul de $\mathbb{R}[u]$ pour lequel existe un nombre réel λ (appelé valeur propre associée au polynôme propre A) vérifiant $\Phi(A) = \lambda A$.

   (a) Montrer que, si A est un polynôme propre de Φ, il est nécessairement de degré b, et que le polynôme B défini par $B(u) = A(1-u)$ est également un polynôme propre de Φ. Quel lien existe-t-il entre les valeurs propres associées à A et à B ?

   (b) Démontrer que les polynômes propres de Φ sont, à une constante multiplicative près non nulle, les polynômes A_k tels que $A_k(u) = u^k(1-u)^{b-k}$ avec $k = 0, 1, 2, \ldots, b$.
   Donner la valeur propre associée à chaque polynôme A_k.

4. Montrer que le système $(A_0, A_1, \ldots, A_b)$ est une base de $\mathbb{R}_b[u]$. Ecrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_b[u]$ à cette base, la matrice inverse P^{-1} et la matrice produit $P^{-1}BP$.

5. Quelles sont les coordonnées du polynôme Q_n défini au **II.4** dans la base $(A_0 A_1, \ldots, A_b)$? En déduire, pour tous entiers n et k la valeur de $P(n,k)$.