ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale et économique

MATHEMATIQUES II

Année 1989

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème, on désigne par a et n deux entiers naturels non nuls. L'objet de la **partie I** est l'étude d'un marché sur lequel na consommateurs achètent chacun un bien qu'ils peuvent se procurer (de façon équiprobable) auprès de n fournisseurs $F_1, \ldots, F_n$.
Dans la **partie II**, on étudie la loi asymptotique du nombre de clients par fournisseur lorsque n tend vers l'infini.

Partie I

On étudie dans cette partie les variables aléatoires suivantes :

- X_i indique le nombre des consommateurs ayant acheté le bien chez le fournisseur F_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
- Y indique le nombre de fournisseurs n'ayant eu aucun client, et le quotient Y/n représente donc la proportion des fournisseurs n'ayant eu aucun client.

1. **Etude des variables aléatoires X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$**

   (a) Déterminer la loi commune, l'espérance et la variance des variables aléatoires X_i, en précisant l'expression de $P(X_i = k)$ pour tout entier naturel k.

   (b) Calculer le mode de X_i, c'est à dire le ou les entier(s) k tel(s) que $P(X_i = k)$ soit maximale. A cet effet, on pourra étudier le rapport suivant pour $0 < k \leqslant na$:

$$r_k = \frac{P(X_i = k+1)}{P(X_i = k)}$$

2. **Coefficient de corrélation des variables aléatoires X_i.**
On désigne par i et j des entiers distincts tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

   (a) Justifier l'identité $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = na$ et, en l'élevant au carré, déterminer la valeur commune des espérances $E(X_i X_j)$ puis des covariances $cov(X_i, X_j)$.

   (b) En déduire le coefficient de corrélation linéaire des variables X_i et X_j. Interpréter le cas $n = 2$ en rappelant à quelle condition nécessaire et suffisante la coefficient de corrélation de deux variables aléatoires est égal à 1 ou -1.

3. **Espérance et variance de la variable aléatoire Y.**
On désigne par B_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) la variable aléatoire prenant pour valeur 1 lorsque le fournisseur F_i n'a aucun client, et 0 sinon.

   (a) En exprimant Y à l'aide des variables aléatoires B_i, calculer l'espérance de Y.

   (b) Déterminer la loi et l'espérance des variables aléatoires $B_i B_j$, en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$. En déduire la variance de la variable aléatoire Y.

   (c) Déterminer les limites de l'espérance et de la variance de Y/n quand n tend vers l'infini.

4. **Loi de la variable aléatoire Y.**
On désigne par k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

   (a) Quelles valeurs la variable Y peut-elle prendre ? Calculer $P(Y = n - 1)$.

   (b) Exprimer l'événement $(Y \neq 0)$ à l'aide des événements $(X_i = 0)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
   En déduire, à l'aide de la formule de Poincaré ou formule du crible, $P(Y = 0)$.

   (c) Donner dans un tableau une valeur approchée (avec deux décimales) de $P(Y = 0)$ lorsque $a = 1, 2, 3$ et $n = 1, 2, 3$.

   (d) Donner, par la même méthode, la probabilité conditionnelle suivante:

$$P\Big(\Big(\bigcap_{i=k+1}^{n} [X_i \neq 0]\Big) / \Big(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0]\Big)\Big)$$

   (e) Calculer la probabilité pour que les k fournisseurs $F_1, F_2, \ldots, F_k$ n'aient aucun client et, en remarquant que:

$$P\Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0]\Big) \cap \Big(\bigcap_{i=k+1}^{n} [X_i \neq 0]\Big)\Big) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0]\Big) P\Big(\Big(\bigcap_{i=k+1}^{n} [X_i \neq 0]\Big) / \Big(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0]\Big)\Big)$$

   donner la probabilité pour que $F_1, F_2, \ldots, F_k$ n'aient aucun client et que $F_{k+1}, F_{k+2}, \ldots, F_n$ aient au moins un client.

   (f) En dénombrant alors le nombre des façons de choisir parmi les n fournisseurs les k d'entre eux qui resteront sans clients, en déduire $P([Y = k])$.

Partie II

Dans cette partie, on désigne par k un entier naturel fixé et par $p_n(k)$ la probabilité (calculée en I.1) pour qu'un fournisseur donné ait exactement k clients, et l'on se propose d'étudier la suite $n \mapsto p_n(k)$.

1. **Etude de la suite $(p_n(0))$.**
On considère la fonction f_0 et la fonction auxiliaire g_0 définies sur $]0, 1[$ par:

$$f_0(x) = \frac{a}{x} \ln(1 - x) + a \text{ et } g_0(x) = x^2 f_0'(x)$$

   (a) Donner l'expression de la fonction g_0 et étudier son signe.

(b) Etudier les variations de $f_0(x)$ et déterminer sa limite L quand x tend vers 0.

(c) On pose $f_0(0) = L$. Déterminer la limite de $f_0'(x)$ quand x tend vers 0, montrer que f_0 est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et donner sa représentation graphique.

(d) Exprimer $p_0(0)$ en fonction de $f_0(\frac{1}{n})$ et en déduire la limite et le sens de variation de la suite $(p_n(0))$.

2. **Etude de la loi-limite du nombre de clients par fournisseur.**

(a) Déterminer la limite $p(k)$ de $p_n(k)$ quand n tend vers l'infini et reconnaitre la loi-limite du nombre de clients par fournisseur quand n tend vers l'infini.
Ce résultat était-il prévisible?

(b) Donner l'espérance, la variance et calculer le mode de cette loi-limite.

3. **Etude de la suite $p_n(k)$ selon les valeurs de k.**
On considère la fonction f_k, et la fonction auxiliaire g_k définies par:

$$f_k(x) = \left(\frac{a}{x} - k\right) \ln(1 - x) + a + \sum_{j=0}^{k-1} \ln(1 - \frac{jx}{a}) \text{ et } g_k(x) = x^2 f_k'(x)$$

l'entier k étant supposé non nul et distinct des réels b et c définis par:

$$b = a + \frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}} \text{ et } c = a + \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

(a) Comparer $\ln[p_n(k)/p(k)]$ et $f_k(1/n)$.

(b) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto x f_k(x)$ quand x tend vers 0. En déduire, selon la position de k par rapport aux réels b et c, le signe de $f_k(1/n)$ et la position de $p_n(k)$ par rapport à $p(k)$ quand n tend vers I'infini.

(c) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto g_k(x)$ quand x tend vers 0. En déduire que les suites $(f_k(1/n))$ et $(p_k(n))$ sont monotones à partir d'un certain rang et préciser leur sens de variation selon la position de k par rapport aux réels b et c.