ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES III

Année 1999

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'objectif de ce probléme est l'étude de la modélisation de l'accroissement d'une population, tant par les naissances que par l'immigration.

Cette étude est effectuée dans la partie II, tandis que, dans la partie I, on établit un résultat probabiliste préliminaire.

Partie I

1. Etude des séries dérivées de la série géométrique.
   Dans toute cette question, on désigne par x un nombre réel x tel que $0 \leqslant x < 1$.

   (a) Calculer pour tout nombre entier naturel n les deux sommes suivantes:

   $$\sum_{k=0}^{n} x^k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$$

   (b) Déterminer la limite de x^n et de nx^n, et des deux sommes précédentes quand n tend vers $+\infty$.
   On admettra alors qu'il est licite, pour $0 \leqslant x < 1$ de dériver terme à terme l'égalité classique:

   $$\sum_{m=0}^{+\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$$

autrement dit, que l'on a pour tout nombre entier naturel non nul k la relation suivante (R):

$$\sum_{m=k}^{+\infty} m(m-1)\dots(m-k+1)x^{m-k} = \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

(c) Exprimer ainsi $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ sous la forme d'une série.

(d) Expliciter la dérivée $k^{ième}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)}$.
Effectuer dans la relation (R) le changement d'indice $n = m-k$ et déduire de ces résultats l'expression de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_{n+k}^{k} x^n$ en fonction de k et x.

2. Application à l'étude de la loi binomiale négative.
On considére une suite d'épreuves de Bernoulli identiques, indépendantes et menant au succés avec la probabilité p $(0 < p < 1)$.
Pour tout nombre entier $k \geqslant 1$, on désigne par X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de l'épreuve où intervient le k-iéme succés (et X_k prend donc des valeurs supérieures ou égales à k).

(a) On suppose $k = 1$. Préciser la loi de X_1, la probabilité $P(X_1 = n+1)$ pour tout nombre entier naturel n et l'espérance $E(X_1)$ de la variable aléatoire X_1.

(b) On suppose $k > 1$. Déterminer la probabilité d'obtenir $k-1$ succés en $n+k-1$ épreuves, puis en déduire la probabilité $P(X_k = n+k)$ pour tout nombre entier naturel n.

(c) A l'aide des résultats précédents, vérifier que la série $\sum P(X_k = n+k)$ a pour somme 1, puis calculer l'espérance $E(X_k)$ de la variable aléatoire X_k en fonction de p et k.
Comment peut-on interpréter ce dernier résultat?
On dit alors que la variable aléatoire X_k suit la loi binomiale négative de paramétres p et k.

Partie II

On étudie dans cette partie la croissance d'une population au cours du temps. A cet effet, on introduit pour tout nombre réel positif t la variable aléatoire $X(t)$ indiquant le nombre des individus de la population à l'instant t, et l'on suppose que l'on a $X(0) = k$, autrement dit que la population compte k individus $(k \geqslant 0)$ à l'instant initial $t = 0$.

1. Croissance de la population par les naissances $(k > 0)$.
On suppose dans cette question qu'il existe un nombre réel strictement positif λ tel que l'on ait pour tout couple (t, h) de nombres positifs avec $h > 0$ et pour tout nombre entier naturel n:

- $P(X(t+h) < n+k / X(t) = n+k) = 0$ (où la notation $P(X(t+h) < n+k/X(t) = n+k)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement "$X(t+h) < n+k$" sachant "$X(t) = n+k$").
- $P(X(t+h) = n+k+1 / X(t) = n+k) = \lambda(n+k)h + h\varepsilon'_n(h)$
- $P(X(t+h) > n+k+l / X(t) = n+k) = h\varepsilon''_n(h)$
où $h \mapsto \varepsilon'_n(h)$ et $h \mapsto \varepsilon''_n(h)$ désignent deux fonctions de la variable h (indépendantes de t) tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

Ces hypothéses signifient que la population ne peut pas diminuer, que la probabilité pour qu'une naissance se produise pendant une courte durée h est proportionnelle à cette durée h et au nombre $n+k$ des individus présents à l'instant t, et qu'enfin la probabilité pour que plusieurs naissances se produisent pendant une courte durée h est négligeable devant la probabilité d'une seule naissance.
On précisera dans ce contexte la probabilité conditionnelle $P(X(t+h) = n+k / X(t) = n+k)$.

(a) Etablir à l'aide de la formule des probabilités totales le résultat suivant:

$$P(X(t+h)=k)=(1-\lambda kh)P(X(t)=k)+h\varepsilon_0(h)$$

où $h\mapsto\varepsilon_0(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.
En déduire que la fonction définie par $P_k(t)=P(X(t)=k)$ est dérivable à droite sur R^+ et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:

$$p_k'(t)=-\lambda kp_k(t)$$

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction p_k.

(b) Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $t\mapsto e^{\lambda kt}p_k(t)$ puis, en tenant compte de la valeur de $p_k(0)=P(X(0)=k)$, en déduire l'expression de $p_k(t)$ en fonction de k, λ et t.

(c) Etablir le résultat suivant pour $n>1$:

$$P(X(t+h)=n+k)=(1-\lambda(n+k)h)P(X(t)=n+k)+\lambda(n+k-1)hP(X(t)=n+k-1)+h\varepsilon_n(h)$$

où $h\mapsto\varepsilon_n(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.
En déduire que la fonction définie par $p_{n+k}(t)=P(X(t)=n+k)$ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}^+$ pour $k\geqslant 1$ et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:

$$P_{n+k}'(t)=-\lambda(n+k)P_{n+k}(t)+\lambda(n+k-1)p_{n+k-1}(t)$$

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction p_{n+k}.

(d) Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $t\mapsto e^{\lambda(n+k)t}p_{n+k}(t)$ et en déduire par récurrence sur n le résultat suivant:

$$P_{n+k}(t)=P(X(t)=n+k)=C_{n+k-1}^{k-1}\;e^{-\lambda kt}(1-e^{-\lambda t})^n$$

(e) Reconnaître à l'aide des résultats de la partie I la loi de la variable aléatoire $X(t)$ et déterminer son espérance $E(X(t))$ en fonction de λ, k et t.

2. Croissance de la population par l'immigration.
On suppose dans cette question qu'il existe un nombre réel strictement positif μ tel que l'on ait pour tout couple (t,h) de nombres positifs avec $h>0$ et pour tout nombre entier naturel n:

- $P(X(t+h)<n+k/X(t)=n+k)=0$
- $P(X(t+h)=n+k+1/X(t)=n+k)=\mu h+h\varepsilon_n'(h)$
- $P(X(t+h)>n+k+1/X(t)=n+k)=h\varepsilon_n''(h)$
où $h\mapsto\varepsilon_n'(h)$ et $h\mapsto\varepsilon_n''(h)$ désignent deux fonctions de la variable h (indépendantes de t) tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

Ces hypothéses signifient que la population ne peut pas diminuer, que la probabilité d'arrivée d'un immigré pendant une courte durée h est proportionnelle à cette durée h (mais indépendante du nombre $n+k$ des individus déjà présents à l'instant t), et qu'enfin la probabilité d'arrivée de plusieurs immigrés pendant une courte durée h est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul immigré.
On précisera dans ce contexte la probabilité conditionnelle $P(X(t+h)=n+k/X(t)=n+k)$.

(a) Etablir à l'aide de la formule des probabilités totales le résultat suivant:

$$P(X(t+h)=k)=(1-\mu h)P(X(t)=k)+h\varepsilon_0(h)$$

où $h\mapsto\varepsilon_0(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.
En déduire que la fonction définie par $q_k(t)=P(X(t)=k)$ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}^+$ et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:

$$q_k'(t)=-\mu q_k(t)$$

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction q_k.

(b) Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $t \mapsto e^{\mu t} q_k(t)$ puis, en tenant compte de la valeur de $q_k(0) = P(X(0) = k)$, en déduire l'expression de $q_k(t)$ en fonction de μ et t.

(c) Etablir le résultat suivant pour $n \geqslant 1$:

$$P(X(t+h) = n+k) = (1-\mu h)P(X(t) = n+k) + \mu h P(X(t) = n+k-1) + h\varepsilon_n(h)$$

où $h \mapsto \varepsilon_n(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.
En déduire que la fonction définie par $q_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}^+$ pour $k \geqslant 1$ et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:

$$q'_{n+k}(t) = -\mu q_{n+k}(t) + \mu q_{n+k-1}(t)$$

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction q_{n+k}.

(d) Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $t \mapsto e^{\mu t} q_{n+k}(t)$ et en déduire $q_{n+k}(t)$ pour $n = 1,\ 2$ et 3, puis dans le cas général.

(e) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $X(t) - k$ et donner l'espérance $E(X(t))$ en fonction de μ, k et t.

** FIN **