CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1978

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

E_0 est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. E_1 est l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une dérivée continue.

Le nombre n est un entier strictement positif.

Partie I

A tout élément f de E_0, on associe l'application F_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F_n(0) = f(0) \quad \text{et} \quad F_n(x) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}f(t)dt \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

1. Que peut-on dire de F_n si f est paire ? si f est impaire ?

2. Calculer F_n lorsque $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, lorsque $f(x) = \sum\limits_{p=0}^{m} a_p x^p$.

3. Si f est bornée sur $[-A, A]$ par le nombre M, montrer alors que F_n a la même propriété.

4. Montrer que F_n appartient à E_0.

5. (a) Montrer que, si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers plus l'infini (resp. moins l'infini), $F_n(x)$ a la même propriété. (On pourra considérer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une décomposition de l'intervalle d'intégration en $[0, x_0] \cup [x_0, x]$; et pour tout x assez grand et x_0 bien choisi, majorer séparément deux intégrales.)

(b) Etendre au cas où $f(x)$ tend vers λ appartenant à $\mathbb{R}$.

(c) Etendre au cas où $f(x)$ tend vers plus l'infini.

6. Montrer que F_n admet une dérivée F'_n, en tout point $x \neq 0$ et que

$$F'_n(x) = \frac{n}{x}(f(x) - F_n(x))$$

PARTIE II

Désormais f appartient à E_1.

1. Montrer que F_n admet une dérivée en tout point. Calculer $F'_n(0)$ en fonction de n et de $f'(0)$.

2. Montrer que F_n appartient à E_1 et que T_n , défini par $T_n(f) = F_n$, est un endomorphisme de E_1.

3. T_n est-il injectif ? surjectif ? (on pourra étudier la dérivabilité de F'_n.)

4. On suppose désormais que f est 1a fonction de répartition d'un aléa numérique (ou variable aléatoire) X dont la densité de probabilité, notée φ, appartient à E_0. Ecrivant $F'_n(x) = \frac{n}{x^{n+1}}h(x)$ pour $x \neq 0$, étudier les variations et le signe de $h(x)$. En déduire que F_n est la fonction de répartition d'un aléa noté X_n, de densité de probabilité Φ_n.

5. Si $A \neq 0$, montrer que pour tout entier $p \in [1, n-1]$:

$$\int_0^A t^p \Phi_n(t)t = \frac{n}{n-p}A^p(F_n(A) - F_p(A) = \frac{n}{n-p}(\int_0^A t^p\varphi(t)dt - A^{p-n}\int_0^A t^n\varphi(t)dt)$$

6. On suppose de plus que, pour tout entier strictement positif p, il existe

$$M_p(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p\varphi(t)dt \qquad \text{(moment d'ordre } p \text{ de} X\text{)}$$

En déduire l'existence et la valeur du moment d'ordre p de X_n, noté $M_p(X_n)$, pour tout $p < n$.
Montrer que, si p reste fixe, le moment $M_p(X_n)$ a pour limite $M_p(X)$ lorsque n tend vers plus l'infini.

7. Montrer que la fonction de répartition de X_n est telle que, pour tout x fixé, sa valeur a pour limite la valeur de la fonction de répartition de X.