CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1979

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. On désigne par f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose que, en tout point v de $]a, b[$, la fonction f admet une dérivée seconde $f''(v)$.
On pose $c = \dfrac{a+b}{2}$.

PARTIE I

Soit Γ le graphe de f.

1. On désigne par T la tangente à Γ au point d'abscisse c.

   (a) Donner une équation de T sous la forme : $y = \tau(x)$.

   (b) Calculer l'intégrale : $\int_a^b \tau(x)dx$

   Dans la suite de la première partie, on suppose que, pour tout élément v de $]a, b[$, $f''(v) \geqslant 0$.

2. Etudier la variation de la fonction numérique ψ définie sur $[a, b]$ par la relation :

$$\psi(x) = f(x) - \tau(x)$$

   En déduire le signe de $\psi(x)$.

3. Soit D la droite joignant les points de Γ d'abscisses a et b.

(a) Donner une équation de D sous la forme :

$$y = \delta(x)$$

(b) Etudier Ia variation de la fonction numérique θ définie sur $[a, b]$ par la relation :

$$\theta(x) = f(x) - \delta(x)$$

En déduire le signe de $\theta(x)$.

(c) Calculer l'intégrale : $\int\limits_a^b \delta(x)dx$.

4. Comparer deux à deux les nombres réels :

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad J = (b-a)f(c) \qquad K = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

En déduire l'encadrement : $1 \leqslant \ln 3 \leqslant \dfrac{4}{3}$. (Le symbole ln représente le logarithme néperien.)

PARTIE II

1. Soient x un élément de $[a, b]$ distinct de c et φ la fonction numérique définie sur $[a, b]$ par la relation :

$$\varphi(t) = f(t) - f(c) - (t-c)f'(c) - \lambda(t-c)^2,$$

où λ est le nombre réel déterminé par la relation $\varphi(x) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle à la fonction φ et à sa dérivée, montrer qu'il existe un élément v_0 de $]a, b[$ tel que :

$$\lambda = \frac{1}{2}f''(v_0)$$

Retrouver ainsi le signe de $\psi(x)$, déjà étudié dans le **2** de la première partie.

2. On suppose qu'il existe un nombre réel positif M_2 tel que, pour tout élément v de $]a, b[$, $|f''(v)| \leqslant M_2$.

(a) Montrer que, pour tout élément x de $[a, b]$,

$$\left|f(x) - f(c) - (x-c)f'(c)\right| \leqslant \frac{M_2}{2}(x-c)^2$$

(b) En déduire que : $\left|\int\limits_a^b f(x)dx - (b-a)f(c)\right| \leqslant \dfrac{M_2}{24}(b-a)^3$.
Examiner le cas où f est une fonction polynomiale de degré 2.

PARTIE III

1. Calculer le nombre : $\int\limits_a^b f(x)dx - (b-a)f(c) - \dfrac{(b-a)^2}{24}\left(f'(b) - f'(a)\right)$ lorsque :

(a) $f(x) = 1$
(b) $f(x) = x$
(c) $f(x) = x^2$
(d) $f(x) = x^3$.
Généraliser les résultats obtenus au cas où f est une fonction polynomiale de degré $\leqslant 3$.

Dans la suite du problème, on désigne par ω un nombre réel strictement positif et par g une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-\omega,\omega]$.
On suppose que g est impaire, c'est-à-dire que, pour tout élément t de $[-\omega,\omega]$, $g(-t)=-g(t)$. On suppose en outre que g est cinq fois dérivable sur $[-\omega,\omega]$, et que sa dérivée cinquième $g^{(5)}$ est continue.

2. Soit u un élément de $[-\omega,\omega]$.

   (a) On considère les fonctions numériques α et β définies sur $[-\omega,\omega]$ par les relations :

$$\alpha(t)=\frac{1}{24}(u-t)^4$$

$$\beta(t)=\alpha(t)g^{(4)}(t)-\alpha'(t)g'''(t)+\alpha''(t)g''(t)-\alpha'''(t)g'(t)+\alpha^{(4)}(t)g(t)$$

   Calculer la dérivée de β.
   En déduire la relation :

$$g(u)=ug'(0)+\frac{u^3}{6}g'''(0)+\frac{1}{24}\int_0^u (u-t)^4 g^{(5)}(t)dt$$

   (b) Etablir de même la relation :

$$g''(u)=ug'''(0)+\frac{1}{2}\int_0^u (u-t)^2 g^{(5)}(t)dt$$

   (c) Soit N_5 un nombre réel positif tel que, pour tout élément t de $[-\omega,\omega]$, $\left|g^{(5)}(t)\right| \leqslant N_5$.
   Montrer que : $\left|g(u)-ug'(0)-\dfrac{u^2}{6}g''(u)\right| \leqslant \dfrac{N_5}{24}\left|\int_0^u (u-t)^2(u^2+2ut-t^2)dt\right|$.
   Calculer l'intégrale : $\int_0^u (u-t)^2(u^2+2ut-t^2)dt$.

3. On suppose que la fonction f est quatre fois dérivable sur $[a,b]$ et que sa dérivée quatrième $f^{(4)}$ est continue.
   Soit M_4 un nombre réel positif tel que, pour tout élément x de $[a,b]$, $\left|f^{(4)}(x)\right| \leqslant M_4$.
   En posant $t=x-c$ et $g(u)=\int_{-1}^{u} f(t+c)dt$, déduire de la question précédente la majoration :

$$\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(c)-\frac{(b-a)^2}{24}\left(f'(b)-f'(a)\right)\right| \leqslant \frac{7M_4}{5760}(b-a)^5$$

Retrouver ainsi les résultats du **1** de la troisième partie.