



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1982

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER EXERCICE

On désigne par $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à éléments réels.

On considère les éléments suivants de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer K comme combinaison linéaire de I et J . Pour tout entier naturel non nul n , calculer J^n en fonction de J et de n . En déduire K^n . Expliciter les éléments de K^n en numération décimale.

2. Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où a et b parcourent \mathbb{R} . Montrer que E

est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

(On rappelle qu'une sous-algèbre d'une algèbre en est exactement une partie non vide, stable par les lois induites, internes et externes).

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel réel sous-jacent à E ?

3. Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , soit $f_{a,b}$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base B est $M(a, b)$.

- (a) Vérifier que $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de B à une base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ constituée par des vecteurs propres de $f_{a,b}$. Préciser la valeur propre associée à chacun de ces vecteurs propres. Déterminer tous les sous-espaces propres et donner leurs dimensions.
- (b) On désigne par tQ la matrice transposée de Q . Calculer le produit ${}^tQ \cdot Q$. En déduire la matrice Q^{-1} .
- (c) Quelle est la matrice de $f_{a,b}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$? Et à l'aide des questions a) et b) calculer $M^n(a, b)$ pour tout entier naturel non nul.
- (d) Retrouver ainsi l'expression de K^n obtenu à la question 1.

DEUXIEME EXERCICE

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{\ln \sqrt{3}} (\operatorname{th} x)^n dx$, où \ln désigne le logarithme népérien.

On rappelle que, pour tout nombre réel x , $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. On rappelle aussi que la fonction th est strictement croissante, dérivable sur \mathbb{R} et que $(\operatorname{th} x)' = 1 - (\operatorname{th} x)^2$.

- Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq I_n \leq \frac{\ln \sqrt{3}}{2^n}$. En déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.
- Calculer I_0 et I_1 .
- Montrer que $I_n - I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.
- On considère les séries de termes généraux $u_n = \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$, où $n \geq 0$, et $v_n = \frac{1}{n2^n}$ où $n \geq 1$.
 - Montrer que ces deux séries sont convergentes.
 - En utilisant les deux questions 2) et 3), calculer les sommes de ces deux séries.

TROISIEME EXERCICE

On considère deux pièces de monnaie notées A_1 et A_2 . Lorsqu'on lance la pièce A_1 , la probabilité d'obtenir "face" est p_1 , $0 \leq p_1 \leq 1$, celle d'obtenir "pile" est $q_1 = 1 - p_1$. De même, lorsqu'on lance la pièce A_2 , la probabilité d'obtenir "face" est p_2 , $0 \leq p_2 \leq 1$, celle d'obtenir "pile" est $q_2 = 1 - p_2$.

On effectue une suite de parties de la façon suivante : à la première partie, on choisit une pièce au hasard (avec la probabilité $\frac{1}{2}$) et on joue avec cette pièce; si le résultat est "face", on joue la deuxième partie avec A_1 , si le résultat est "pile", on joue la deuxième partie avec A_2 ; ensuite, pour tout entier $n \geq 1$, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ partie avec A_1 si l'on a obtenu "face" à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ partie avec A_2 si on a obtenu "pile" à la $n^{\text{ème}}$ partie.

- Pour tout entier $n \geq 1$, on note u_n la probabilité d'avoir "face" à la $n^{\text{ème}}$ partie.
 - Exprimer u_1 , puis u_2 en fonction de p_1 et p_2 .
 - Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = (p_1 - p_2)u_n + p_2.$$
 - Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ tend, quand n tend vers l'infini, vers une limite u que l'on calculera. Dans quels cas a-t-on $u = \frac{1}{2}$?

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n la variable aléatoire, associée à la $n^{\text{ème}}$ partie, qui prend la valeur 1 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est "face", la valeur 0 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est "pile".
- (a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2 et calculer leurs espérances mathématiques.
- (b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

QUATRIEME EXERCICE

Soit X une variable aléatoire réelle, définie sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) , dont la loi de probabilité admet une densité f définie, pour tout x réel, par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que f définit bien une densité de probabilité et la représenter graphiquement.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X et représenter son graphe.
3. La variable aléatoire X possède-t-elle une espérance mathématique ? La calculer si elle existe.
4. Calculer, pour x et a réels, l'expression $F_a(x) = P(X < x / X \geq a)$, probabilité conditionnelle de l'évènement $\{X < x\}$ sachant que l'évènement $\{X \geq a\}$ est réalisé.
5. Soit $a \geq 1$ et soit Y la variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) par $Y = aX$. Trouver la fonction de répartition de Y ; en déduire sa densité de probabilité. Calculer l'espérance mathématique de Y .

- FIN -