



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE
MATHEMATIQUES I

Année 1982

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

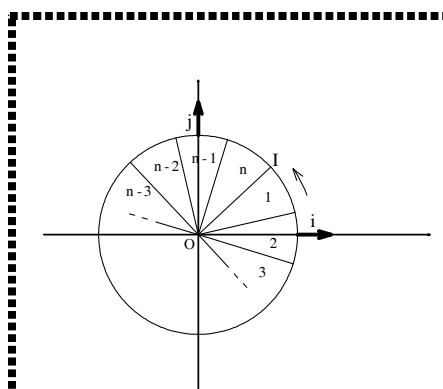
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

(La présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note. La première et la seconde partie sont indépendantes.)

Le symbole $\ln$ représente le logarithme népérien. On note $E(x)$ la partie entière de x , et $\overline{E}(x)$ la différence $x - E(x)$.

On désigne par n un entier naturel supérieur à 2 ($n \geq 2$) et par N un entier naturel non nul. On pose $h = \frac{2\pi}{n}$ et $x_0 = Nh$.

Une roue de loterie est schématisée par un disque D de centre O divisé en n secteurs égaux, mobile par rapport à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les secteurs sont numérotés de 1 à n dans le sens inverse du sens trigonométrique. Soit I le point du cercle limitant D tel que le segment $[O, I]$ sépare les secteurs de numéros 1 et n .



Une expérience aléatoire consiste à lancer la roue dans le sens trigonométrique. On suppose que lorsque celle-ci est arrêtée, la demi-droite $(O, \vec{i})$ ne rencontre qu'un seul secteur (dit gagnant) en des points autres que O . On note X la variable aléatoire prenant pour valeur la mesure x en radians de l'angle total dont a tourné la roue avant de s'arrêter (x est donc une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OI})$ qui prend en compte les tours effectués par la roue). On suppose enfin que la variable aléatoire X possède une densité de probabilité f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \exp(x_0 - t) & \text{si } t \geq x_0 \\ 0 & \text{si } t < x_0 \end{cases}$$

PARTIE I

1. (a) Expliciter la fonction de répartition F de X et tracer son graphe. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .
- (b) Soit q un élément de $\mathbb{Z}$. Calculer la probabilité de l'événement $((q-1)h \leq X < qh)$.
- (c) Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement $(X < qh)$ sachant que l'événement $(X \geq (q-1)h)$ est réalisé.
2. Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro du secteur gagnant.

- (a) Soit k un entier naturel. Montrer que la relation $nq + k > N$, où $q \in \mathbb{Z}$, équivaut à $q \geq 1 + E\left(\frac{N-k}{n}\right)$
- (b) Soit k un entier naturel appartenant à l'intervalle $[1, n]$. Montrer que la probabilité $P_n(k)$ de l'événement $(Y = k)$ est de la forme

$$P_n(k) = \beta \alpha^{\overline{E}\left(\frac{N-k}{n}\right)}$$

où α est un nombre réel strictement supérieur à 1 et où β ne dépend que de n (et non de k).

On pourra admettre ce résultat pour la suite, les valeurs de α et de β n'intervenant pas dans le reste du problème.

3. Soit r le reste de la division euclidienne de N par n ($0 \leq r \leq n-1$).
- (a) Expliciter $P_n(k)$ en fonction de α , β , n , r et k . (On notera que l'application $x \mapsto \overline{E}(x)$ admet 1 pour période.)
- (b) Montrer que lorsque k décrit l'intervalle $[1, n]$ de N , le nombre $E\left(\frac{r-k}{n}\right)$ prend au plus deux valeurs, que l'on précisera.
- (c) On suppose dans cette question que $r = 0$. Simplifier l'expression de $P_n(k)$ et dresser le tableau de variation de l'application $k \mapsto P_n(k)$. Montrer que le graphe de cette application est contenu dans celui d'une fonction exponentielle. Donner l'allure de ces graphes sur un même dessin.
- (d) On suppose que $r \neq 0$. Montrer que $E\left(\frac{r-k}{n}\right)$ prend effectivement deux valeurs, et trouver les valeurs correspondantes de k . Simplifier alors $P_n(k)$, dresser le tableau de variation et donner l'allure du graphe de l'application $k \mapsto P_n(k)$.
- (e) On ne fait plus d'hypothèse sur r . Montrer que l'ensemble des valeurs prises par $P_n(k)$ lorsque k décrit l'intervalle $[1, n]$ de N est indépendant de r . En donner le plus grand et le plus petit élément.
4. On suppose dans cette question que $r = 0$. En calculant la somme $\sum_{k=1}^n P_n(k)$, exprimer β en fonction de α et de n .
Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y .
5. Dans cette question, k et x_0 sont fixés, x_0 étant supposé non congru à 0 modulo 2π . On suppose que n varie dans l'intervalle $[k, +\infty[$ de $\mathbb{N}$.
- (a) Montrer que les rapports $\frac{N}{n}$ et $\frac{r}{n}$ sont constants, et que $r \geq k$ pour n assez grand.
- (b) En déduire, quand n tend vers l'infini, que $P_n(k)$ est équivalent à $\alpha^{r/n} \frac{\ln \alpha}{n(\alpha-1)}$.

PARTIE II

On fixe $n \geq 4$. Pour tout entier naturel k appartenant à $[1, n]$, on pose $p_k = P_n(k)$ et $a_k = p_{k-1} + p_k + p_{k+1}$, en convenant que $p_0 = p_n$ et que $p_{n+1} = p_1$. Le secteur de numéro n est aussi numéroté 0, et le secteur de numéro 1 est aussi numéroté $n + 1$.

La loterie est utilisée avec la règle de jeu suivant : avant l'expérience, le joueur mise sur un secteur de son choix ; soit k le numéro de ce secteur ; après l'expérience, il perçoit le double de sa mise si la roue s'est arrêtée sur le secteur k , il est remboursé si la roue s'est arrêtée sur le secteur $k - 1$ ou le secteur $k + 1$; il perd sa mise dans les $n - 3$ autres cas.

Le joueur décide de tenter sa chance plusieurs fois consécutives, avec la méthode que voici : au premier coup, il mise sur un secteur choisi au hasard (les n choix sont équiprobables) ; si au m -ième coup (où $m \geq 1$) il a été remboursé ou s'il a doublé sa mise (on dit dans l'un et l'autre cas qu'il a gagné au m -ième coup), il mise au $(m + 1)$ -ième coup sur le même secteur qu'au m -ième coup ; sinon (on dit alors qu'il a perdu au m -ième coup), il choisit au hasard l'un des autres secteurs (les $n - 1$ choix sont équiprobables).

On suppose que les coups successifs constituent des expériences indépendantes et identiques. (En particulier, le point I de D est remis sur la demi-droite $(O, \vec{i})$ après chaque expérience.)

On note $C_k(m)$ la probabilité de choisir le secteur k au m -ième coup, $G_k(m)$ la probabilité conditionnelle de gagner au m -ième coup quand on a misé sur le secteur k , et enfin $G(m)$ la probabilité de gagner au m -ième coup.

1. Calculer les nombres $C_k(1)$, $G_k(1)$ et $G(1)$.
2. Calculer $G_k(m)$ lorsque $m \geq 2$. En déduire que, pour tout entier naturel non nul m ,

$$C_k(m+1) = a_k C_k(m) + \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (1 - a_i) C_i(m)$$

3. Pour tout entier naturel non nul m , on considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^n$:

$$C_m = \begin{pmatrix} C_1(m) \\ C_2(m) \\ \vdots \\ C_n(m) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer une matrice carrée M d'ordre n à coefficients réels indépendants de m , telle que, pour tout entier naturel non nul m ,

$$C_m = M^{m-1} C_1$$

- (b) En déduire que $G(m) = {}^t A M^{m-1} C_1$ (où ${}^t A$ désigne la transposée de A).

4. On prend n assez grand pour que les nombres a_k , où $1 \leq k \leq n$, puissent être supposés égaux.

- (a) Calculer leur valeur commune.
- (b) Montrer qu'il existe un couple (λ, μ) de nombres réels tel que

$$M = \lambda I + \mu J,$$

où I désigne la matrice unité d'ordre n et J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- (c) Pour tout entier naturel non nul q , calculer J^q . En déduire M^{m-1} .
- (d) Déterminer finalement la valeur de $G(m)$. Le résultat était-il prévisible?