CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 1985

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour tout couple (q, r) de nombres entiers naturels non nuls tel que $q \leqslant r$, on note :

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q+1} + \cdots + \frac{1}{r}$$

la somme des inverses des nombres entiers naturels consécutifs de q à r (cette somme se réduisant à $\frac{1}{q}$ si $q = r$).

Partie I

Soient $u = (u_n)_{n \geqslant 1}$ et $v = (v_n)_{n \geqslant 1}$ les suites définies par les relations:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

1. Etudier le signe des fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par les relations :

$$\varphi(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad \psi(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

2. Montrer que la suite u est décroissante et que la suite v est croissante.

3. Montrer que les suites u et v convergent vers une même limite a (qu'on ne demande pas de calculer).

4. (a) Déterminer un nombre entier n_0 tel que la relation $n \geqslant n_0$ implique :

$$|a - v_{n-1}| \leqslant 10^{-2}$$

   (b) Calculer une valeur approchée de a à la précision 10^{-1}.

Partie II

Une entreprise doit recruter au plus un employé à choisir parmi n candidats, où $n \geqslant 5$. On suppose que ces candidats peuvent être classés, sans ex aequo, selon leur valeur. Ils sont entendus, l'un après l'autre, par le directeur, lequel doit décider immédiatement, à la fin de chaque entretien, d'engager ou de refuser le candidat (qu'il ne peut donc comparer qu'aux candidats préalablement entendus et refusés).
L'ordre de passage des candidats est supposé aléatoire, les différents ordres de passage possibles étant pris équiprobables.
Le problème a pour objet l'étude de la procédure de choix suivante : on commence par se donner un seuil, c'est-à-dire un nombre entier s tel que $2 \leqslant s \leqslant n$. On entend d'abord les $s-1$ premiers candidats qu'on refuse systématiquement, et qui constituent un échantillon servant à fixer le niveau de qualité du recrutement : on engage le premier des candidats à se présenter ensuite qui se révèle meilleur que les $s-1$ candidats de l'échantillon. (Au cas où il ne s'en présente pas, personne n'est engagé.)
On note $\theta_n(s)$ la probabilité pour que soit engagé de cette façon le meilleur des n candidats.

1. On note E_k, où $1 \leqslant k \leqslant n$, l'événement : " le meilleur des n candidats est le k-ième à se présenter ", et $F_{k,s}$, où $s \leqslant k \leqslant n$, l'événement " le meilleur des $k-1$ premiers candidats est parmi les $s-1$ premiers à se présenter ".

   (a) Calculer les probabilités $P(E_k)$ et $P(F_{k,s})$ des événements E_k et $F_{k,s}$ où $s \leqslant k \leqslant n$.

   (b) Calculer $P(E_k \cap F_{k,s})$ et en déduire que

   $$\theta_n(s) = \frac{s-1}{n}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

   (c) A l'aide des résultats de la partie I, s étant fixé, trouver la limite de $\theta_n(s)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. (a) Calculer la probabilité pour que l'on ne recrute aucun candidat.

   (b) Pour tout nombre entier j tel que $s \leqslant j \leqslant n$, calculer la probabilité pour que le j-ième candidat qui se présente soit recruté.

   (c) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre des candidats qui auront été entendus à la fin de la procédure, et montrer que X a pour espérance:

   $$E(X) = (s-1)\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} + \cdots + \frac{1}{n-1} + 1\right)$$

Partie

1. (a) Ecrire l'expression de $\theta_n(s+1) - \theta_n(s)$, où $s \leqslant n-1$, à l'aide de la formule II.1.b) et en déduire qu'il existe un nombre entier naturel s_n et un seul appartenant à l'intervalle $[2, n-1]$ et tel que, pour tout nombre entier naturel s appartenant à $[2, n]$, $\theta_n(s_n) \geqslant \theta_n(s)$.
   On admettra à cet effet que, pour tout couple (q, r) de nombres entiers naturels vérifiant $1 < q \leqslant r$,

   $$\frac{1}{q} + \frac{1}{q+1} + \cdots + \frac{1}{r} \neq 1$$

   On montrera que le nombre s_n est caractérisé par la conjonction des relations :

   $$\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_n+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} < 1$$

   $$\frac{1}{s_n-1} + \frac{1}{s_n} + \cdots + \frac{1}{n-1} > 1$$

   (b) Calculer s_5, s_6, s_7 et s_8.

   (c) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n tel que $n \geqslant 5$, soit $s_{n+1} = s_n$, soit $s_{n+1} = 1 + s_n$.

2. (a) Montrer que, pour tout nombre entier q strictement supérieur à 1,

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q+2}+\cdots+\frac{1}{2q}>\frac{1}{2}$$

et

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q+2}+\cdots+\frac{1}{4q}>1$$

(b) En déduire que : $s_n-1>\dfrac{n-1}{4}$.

3. (a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{1}{s_n-1}+\dfrac{1}{s_n}+\cdots+\dfrac{1}{n})=1$.
En déduire la limite de $\dfrac{n}{s_n-1}\theta_n(s_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) A l'aide de la partie I, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{s_n-1}\theta_n(s_n)-\ln\frac{n}{s_n-1})=0$$

(c) En déduire la limite de $\dfrac{n}{s_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
En conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\theta_n(s_n)=\dfrac{1}{e}$

4. On suppose que $n=300$. A l'aide des résultats précédents, déterminer rapidement une valeur approchée (on ne demande pas d'évaluer l'erreur commise) :

(a) Du nombre s qu'il faut choisir pour avoir la probabilité la plus grande de recruter le meilleur des 300 candidats ;
(b) De cette probabilité;
(c) De l'espérance de la variable aléatoire X définie dans la question II.2c).

5. On pose $\alpha_n=\dfrac{\theta_{n+1}(s_{n+1})}{\theta_n(s_n)}$.

(a) On suppose que $s_{n+1}=s_n$. Montrer que $\alpha_n<1$.
(b) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par la relation :

$$f(x)=\frac{s_n}{n+1}\times\frac{n}{s_n-1}\times\frac{x+\frac{1}{n}}{x+\frac{1}{s_n-1}}$$

Montrer que la fonction f est croissante.
En déduire que le résultat de la question a) reste valable dans le cas où $s_{n+1}=1+s_n$.

6. A l'aide des résultats de la question III.3, montrer que, pour n suffisamment grand, l'égalité $s_{n+1}=1+s_n$ implique $s_{n+2}=s_{n+1}$.