CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 1987

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'étude simultanée de deux variables statistiques X et Y a permis d'obtenir les trois observations suivantes :

$$(x_1 = 0, y_1 = 0),\ (x_2 = 1, y_2 = 1),\ (x_3 = -2, y_3 = 0)$$

Dans un plan rapporté à un repère orthonormal, on représente ces trois observations par le nuage de points :

$$M_1(0,0),\ M_2(1,1),\ M_3 = (-2,0)$$

PARTIE I

L'objet de cette partie est d'étudier par différentes méthodes l'ajustement du nuage (M_1, M_2, M_3) par une droite. On désigne par δ une direction donnée du plan et par D une droite non parallèle à δ d'équation $y = ax + b$. On projette les points M_1, M_2, M_3 sur D dans la direction δ. On note m_1, m_2, m_3 les points obtenus (pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, m_i est donc l'intersection de la droite D avec la droite de direction δ passant par M_i).

1. Dans cette question, la direction δ est celle de l'axe des ordonnées Oy. On cherche la droite D rendant minimale l'expression :
$$f(a,b) = M_1m_1 + M_2m_2 + M_3m_3$$

   (a) Calculer les distances M_1m_1, M_2m_2, M_3m_3.

(b) Le nombre réel b est fixé. En distinguant trois cas suivant la position de b par rapport à $\frac{2}{3}$, représenter graphiquement la fonction φ définie par la relation :

$$\varphi(x) = |2x - b| + |x + b - 1|$$

Montrer qu'elle passe par un minimum pour $x = \frac{b}{2}$.

(c) En déduire l'existence et l'unicité d'un couple (a_1, b_1)) conduisant à la plus petite valeur possible pour $f(a, b)$. Tracer la droite D_1 d'équation $y = a_1 x + b_1$.

2. Dans cette question, la direction δ est encore celle de l'axe des ordonnées. On cherche la droite D rendant minimale l'expression :

$$g(a, b) = \sup(M_1m_1,\ M_2m_2,\ M_3m_3)$$

où $\sup(M_1m_1,\ M_2m_2,\ M_3m_3)$ désigne le plus grand des trois nombres réels : M_1m_1, M_2m_2, M_3m_3.

(a) Représenter graphiquement sur une même figure :

- l'ensemble E_1 des points $M(x, y)$ du plan tels que $|y| \leqslant \frac{1}{3}$;
- l'ensemble E_2 des points $M(x, y)$ du plan tels que $|y - 2x| \leqslant \frac{1}{3}$;
- l'ensemble E_3 des points $M(x, y)$ du plan tels que $|x + y - 1| \leqslant \frac{1}{3}$.

En déduire l'ensemble $E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

(b) En déduire l'existence et l'unicité d'un couple (a_2, b_2) conduisant à la plus petite valeur possible pour $g(a, b)$. Tracer la droite D_2 d'équation $y = a_2 x + b_2$

3. Dans cette question, la direction δ est toujours celle de l'axe des ordonnées. On cherche la droite D rendant minimale l'expression :

$$h(a, b) = (M_1m_1)^2 + (M_2m_2)^2 + (M_3m_3)^2$$

Le nombre réel a étant fixé, montrer que la fonction $b \mapsto h(a, b)$ admet un minimum en un point unique que l'on précisera.
En déduire l'existence et I'unicité d'un couple (a_3, b_3) conduisant à la plus petite valeur possible pour $h(a, b)$. Tracer la droite D_3 d'équation $y = a_3 x + b_3$. Quelle est la droite D_3 ainsi obtenue ?

4. Dans cette question, m est un nombre réel donne et l'on suppose $a \neq m$. La direction δ est celle de la droite d'équation $y = mx$. On cherche la droite D rendant minimale l'expression :

$$h_m(a, b) = (M_1m_1)^2 + (M_2m_2)^2 + (M_3m_3)^2$$

(a) Calculer les coordonnées de m_1, m_2, m_3. Exprimer $h_m(a, b)$ en fonction de a, b et m.

(b) Le nombre m est fixé et différent de $\frac{2}{7}$.
Le nombre réel a étant donné, pour quelle valeur de b la fonction $b \mapsto h_m(a, b)$ est-elle minimale ?
En déduire que $h_m(a, b)$ prend la plus petite valeur possible lorsque la fonction θ définie par :

$$\theta(a) = \frac{7a^2 - 4a + 1}{(a - m)^2}$$

est minimale. Etudier la variation de la fonction θ.
En déduire l'existence et I'unicité d'un couple (a_4, b_4) conduisant à la plus petite valeur possible pour $h_m(a, b)$. (On explicitera a_4, et b_4 en fonction de m)

(c) Etudier l'existence d'une telle droite D_4 dans le cas ou $m = \frac{2}{7}$.

PARTIE II

Dans toute la suite, $M_0(x_0, y_0)$ désigne un point du plan associé à une observation supplémentaire des variables statistiques X et Y, et l'on étudie les modifications apportées par ce nouveau point au coefficient de corrélation et à la droite de régression de Y par rapport à X du nuage $(M_1,\ M_2,\ M_3)$.

1. Soient ρ et $\rho(M_0)$ les coefficients de corrélation respectivement associés aux nuages $(M_1,\ M_2,\ M_3)$ et $(M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3)$.

   (a) Calculer ρ en précisant les formules utilisées.

   (b) Calculer $\rho(M_0)$ en fonction de x_0 et y_0.

   (c) Pour tout nombre réel k, on considère les points E_k et F_k de coordonnées respectives $(5+k, k)$ et $(5+k, -k)$. Soient α et β les fonctions qui associent respectivement au nombre réel k les nombres $\rho(E_k)$ et $\rho(F_k)$.
   Montrer que α et β sont continues sur $\mathbb{R}$. Calculer $\alpha(0)$ et $\beta(0)$. Déterminer 1es limites lorsque k tend vers $+\infty$ de $\alpha(k)$ et de $\beta(k)$.
   En déduire que. pour tout nombre réel r appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$, il existe au moins un point M_0 tel que $\rho(M_0) = r$.
   Existe-t-il un point M_0 tel que $\rho(M_0) = 1$ ou tel que $\rho(M_0) = -1$?

2. Soit D une droite d'équation $y = ax + b$.

   (a) On suppose que $3b - a - 1 \neq 0$. Montrer qu'il existe un point M_0 et un seul tel que la droite de régression Δ du nuage $(M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3)$ de Y par rapport à X soit D.

   (b) On suppose que $3b - a - 1 = 0$ et que $(a, b) \neq \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$. Montrer qu'il n'existe aucun point M_0 tel que $\Delta = D$.

   (c) On suppose que $(a, b) = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$. Déterminer I'ensemble des points M_0 tels que $A = D$.
   Retrouver ce résultat sans calcul.