CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE, ECONOMIQUE ET TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 1990

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Préambule

Dans tout le problème, on désigne par a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et par φ une fonction numérique continue et strictement croissante sur $[a, b]$, telle que $\varphi(a) \leqslant 0 \leqslant \varphi(b)$. On note ω l'unique nombre réel tel que $a \leqslant \omega \leqslant b$ et $\varphi(\omega) = 0$.
On appelle *évaluation* de φ le calcul d'une valeur de φ. L'objet du problème est l'étude de deux types d'algorithmes permettant d'obtenir à partir de l'encadrement initial $a \leqslant \omega \leqslant b$ un encadrement plus fin à l'aide d'évaluations successives de la fonction φ.
Dans le cas du premier type (**partie III**), on fixe une précision et on estime le nombre moyen d'évaluations de φ à effectuer pour obtenir cette précision.
Dans le cas du second type (**partie IV**), on impose le nombre d'évaluations de φ à effectuer et l'on estime la précision moyenne obtenue.
On se propose notamment de montrer que, pour chacun des deux types, il existe un algorithme optimal, en un sens que l'on précisera.
La partie **IV** est indépendante des autres.

Partie I Étude d'une fonction

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par les relations :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)} si x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est une fonction continue.
   (b) Déterminer la limite de f en 0.
   (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.

3. (a) Calculer la dérivée de f. Montrer que si $x \neq 1$, le signe de $f'(x)$ est celui de :
   $$g(x) = \ln(x) - \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2}$$
   (b) Calculer la dérivée de g et montrer que le signe de $g'(x)$ est celui de :
   $$h(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$$
   (c) En remarquant que 1 et -2 sont racines de la fonction polynômiale h, décomposer $h(x)$ en produit de facteurs du premier degré.

4. (a) Dresser le tableau de variation de g.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution t et une seule autre que 1. Vérifier que $\sqrt{2} < t < 2$.

5. (a) Dresser le tableau de variation de f.
   (b) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

6. *Application.* Pour tout nombre entier $p \geqslant 2$, on pose :$c_p = \dfrac{(p+2)(p-1)}{p\ln(p)}$
   Montrer que la suite $(c_p)_{p\geqslant 2}$est strictement croissante.

Dans toute la suite du problème, on désigne par p un nombre entier supérieur ou égal à 2.

Partie II Étude d'une variable aléatoire

1. On considère une variable aléatoire Z à valeur dans l'ensemble $\{1, 2, ..., p-1\}$ et telle que :
   $$\begin{cases} P(Z = i) & = \dfrac{1}{p} \quad \text{si } i \neq p-1 \\ P(Z = p-1) & = \dfrac{2}{p} \end{cases}$$
   Ainsi, lorsque $p = 2$, Z est une variable aléatoire certaine de valeur 1.

   (a) Calculer l'espérance de Z.
   (b) Calculer la variance de Z. Contrôler le résultat en prenant $p = 2$.

2. *Application à l'étude d'un algorithme.* On considère p boîtes $B_1, B_2, ..., B_p$. Un objet Ω est caché dans l'une de ces boîtes , on cherche à le localiser, c'est à dire à déterminer le numéro de la boîte qui le contient, grâce à l'algorithme suivant.
   On ouver successivement les boîtes $B_1, B_2, ..., B_k$ jusqu'à ce que l'une ou l'autre des deux situations suivantes soit réalisée :

   - l'objet Ω est découvert ,
   - une seule boîte n'a pas été encore ouverte.

   On remarque que cet algorithme permet effectivement de localiser l'objet Ω.
   On suppose que la boîte dans laquelle est caché Ω a été choisie au hasard, de façon équiprobable, parmi les p boîtes. On note Y la variable aléatoire indiquant le nombre de boîtes ouvertes au cours de la mise en oeuvre de l'algorithme. Montrer que Y suit la même loi que la variable aléatoire Z définie dans la question **II.1**.
   En déduire le nombre moyen de boîtes que l'on ouvre pour localiser l'objet.

Partie III Étude d'un premier type d'algorithme

On rappelle que a, b, φ et ω ont été définis dans le préambule.

1. *Algorithme A_p.*
   On se propose d'étudier un algorithme A_p permettant d'obtenir à partir d'un encadrement $u \leqslant \omega \leqslant v$, où u et v sont des éléments distincts de $[a, b]$, un nouvel encadrement $u' \leqslant \omega \leqslant v'$ tel que :

$$u \leqslant u' \leqslant \omega \leqslant v' \leqslant v \quad \text{et} \quad v' - u' = \frac{v-u}{p} \tag{1}$$

   On définit cet algorithme de la façon suivante. On effectue les évaluations successives :

$$\varphi\left(u + \frac{v-u}{p}\right), \quad \varphi\left(u + 2\frac{v-u}{p}\right), ..., \varphi\left(u + k\frac{v-u}{p}\right)$$

   jusqu'à ce que l'une ou l'autre des deux situations suivantes soit réalisée :

$$\varphi\left(u + k\frac{v-u}{p}\right) \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad k = p-1$$

   Si $\varphi\left(u + k\frac{v-u}{p}\right) \geqslant 0$, on pose : $\begin{cases} u = u + \dfrac{(k-1)(v-u)}{p} \\ v = u + \dfrac{k(v-u)}{p} \end{cases}$

   Si $\varphi\left(u + k\frac{v-u}{p}\right) < 0$, on pose : $\begin{cases} u = u + \dfrac{(p-1)(v-u)}{p} \\ v = u + \dfrac{p(v-u)}{p} \end{cases}$

   Montrer que les conditions (1) sont effectivement satisfaites.

2. *Application répétée de l'algorithme A_p.*
   Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$. A partir de l'encadrement initial $a \leqslant \omega \leqslant b$, on cherche un encadrement $c \leqslant \omega \leqslant d$ tel que $d - c < \varepsilon(b-a)$. A cet effet, on itère l'algorithme A_p afin d'obtenir les encadrements successifs

$$a_1 \leqslant \omega \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant \omega \leqslant b_2, ..., a_n \leqslant \omega \leqslant b_n,$$

   où l'encadrement $a_i \leqslant \omega \leqslant b_i$ est obtenu à partir de l'encadrement $a_{i-1} \leqslant \omega \leqslant b_{i-1}$ par application de l'algorithme A_p. (On convient que $a_0 = a$ et $b_0 = b$). On arrête les calculs dès que $b_n - a_n < \varepsilon(b-a)$. Ainsi, n est le nombre de mises en oeuvre de l'algorithme nécessaires pour obtenir la précision souhaitée.

   (a) Exprimer $b_i - a_i$ en fonction de $b - a$.

   (b) Montrer que :$n = \left[1 - \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(p)}\right]$
   Autrement dit, n est la partie entière de $1 - \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(p)}$.

3. *Estimation du nombre moyen d'évaluation à effectuer.*
   Pour évaluer la performance de la méthode décrite dans la question précédente, on suppose que ω suit une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.
   Pour tout nombre entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on note Y_i la variable aléatoire indiquant le nombre d'évaluations de φ effectuées au cours de la $i^{\text{ème}}$ mise en oeuvre de l'algorithme A_p.

   (a) Montrer que Y_i suit la même loi que la variable aléatoire Y définie dans la question **II.2**.

   (b) On note $V_p(\varepsilon) = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ la variable aléatoire qui indique le nombre total d'évaluations de φ effectuées au cours des n mises en oeuvre de l'algorithme. Calculer l'espérance, notée $\overline{V_p(\varepsilon)}$, de $V_p(\varepsilon)$.

(c) Montrer que, lorsque ε est au voisinage de 0 (l'entier p étant fixé) :

$$\overline{V_p(\varepsilon)} \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \frac{c_p}{2}(-\ln(\varepsilon)) \quad \text{où} \quad c_p = \frac{(p+2)(p-1)}{p\ln(p)}$$

(d) Lorsque ε est suffisament proche de 0, on assimile $\overline{V_p(\varepsilon)}$ à $\frac{c_p}{2}(-\ln(\varepsilon))$. En utilisant cette approximation, déterminer la valeur optimale de p, c'est-à-dire celle qui minimise le nombre moyen d'évaluations de φ qu'on doit effectuer dans la procédure décrite dans la question **III.2**.

Partie IV Étude d'un second type d'algorithme

Dans cette partie, on désigne par q un nombre réel tel que $0 < q < 1$ et par N un nombre entier supérieur ou égal à 2.

1. *Algorithme B_q.*
On se propose d'étudier un algorithme B_q permettant d'obtenir, à partir d'un encadrement $\alpha \leqslant \omega \leqslant \beta$, où α et β sont des éléments distincts de $[a, b]$, un nouvel encadrement $\alpha' \leqslant \omega \leqslant \beta'$ tel que :

$$\alpha \leqslant \alpha' \leqslant \omega \leqslant \beta' \leqslant \beta \quad \text{et} \quad \beta' - \alpha' \leqslant (\beta - \alpha)\sup(q, 1-q) \tag{2}$$

On définit cet algorithme de la façon suivante. On pose $\gamma = (1-q)\alpha + q\beta$. On calcule $\varphi(\gamma)$.

Si $\varphi(\gamma) \geqslant 0$, on pose :$\begin{cases} \alpha' = \alpha \\ \beta' = \gamma \end{cases}$

Si $\varphi(\gamma) < 0$, on pose :$\begin{cases} \alpha' = \gamma \\ \beta' = \beta \end{cases}$

Montrer que les conditions (2) sont effectivement satisfaites, en précisant dans chaque cas la valeur de $\beta' - \alpha'$.

2. *Éude d'une variable aléatoire.*

On conserve les notations de la question **IV.1**. On suppose connu un encadrement $\alpha \leqslant \omega \leqslant \beta$ et on suppose que ω suit une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. On note R_q la variable aléatoire prenant la valeur $\beta' - \alpha'$.

(a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par R_q. Examiner le cas où $q = \frac{1}{2}$.

(b) Déterminer la loi de probabilité de R_q.

(c) Montrer que l'espérance de R_q est $(2q^2 - 2q + 1)(\beta - \alpha)$.

(d) Calculer la variance de R_q en distinguant les cas $q \neq \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$.

3. *Application répétée de l'algorithme B_q.*

On itère N fois l'algorithme B_q afin d'obtenir, à partir de l'encadrement initial $a \leqslant \omega \leqslant b$, les encadrements successifs

$$\alpha_1 \leqslant \omega \leqslant \beta_1, \quad \alpha_2 \leqslant \omega \leqslant \beta_2, ..., \alpha_N \leqslant \omega \leqslant \beta_N,$$

où l'encadrement $\alpha_i \leqslant \omega \leqslant \beta_i$ est obtenu à partir de l'encadrement $\alpha_{i-1} \leqslant \omega \leqslant \beta_{i-1}$ par application de l'algorithme B_q. (On convient que $\alpha_0 = a$ et $\beta_0 = b$).

Pour évaluer la performance de cette méthode, on suppose que ω suit une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. On note T_q la variable aléatoire dont la valeur est $\beta_N - \alpha_N$.

(a) Pour tout nombre entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant N$, on pose :

$$\gamma_i = (1-q)\alpha_{i-1} + q\beta_{i-1}$$

On note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si $\varphi(\gamma_i) \geqslant 0$ et la valeur 0 dans le cas contraire. Montrer que les variables aléatoires X_i suivent une même loi que l'on précisera.

(b) On pose $S_q = X_1 + X_2 + ... + X_N$. Montrer que S_q suit une loi binômiale $B(N, q)$.

(c) Montrer que si $S_q = k$, alors :$\beta_N - \alpha_N = q^k(1-q)^{N-k}(b-a)$

En déduire l'ensemble des valeurs que peut prendre T_q. Examiner le cas où $q = \frac{1}{2}$.

On suppose que $q \neq \frac{1}{2}$. Montrer que, pour tout nombre entier naturel k inférieur ou égal à N :

$$P(T_q = q^k(1-q)^{N-k}(b-a)) = C_N^k q^k (1-q)^{N-k}$$

(d) Calculer l'espérance et la variance de T_q lorsque $q \neq \frac{1}{2}$. Vérifier que les résultats obtenus restent valables si $q = \frac{1}{2}$.

4. *Comparaison des algorithmes* B_q.

Montrer que $\frac{1}{2}$ est la valeur qui minimise l'espérance de T_q lorsque N est fixé et que q parcours $]0, 1[$. Conclure.