



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 1993

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Partie I

On établit dans cette partie la démonstration dans un cas particulier de certains résultats connus, mais souvent admis dans le cours, concernant la fonction exponentielle.

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x}$.
- (b) En déduire que : $e^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

- (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du$$

- (b) Etablir l'encadrement : $0 \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du \leq \frac{1}{n!}$.

- (c) En conclure que :

$$e^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Dans toute la suite du problème, on désigne par N un nombre entier naturel non nul.

Partie II

On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N : B_1, B_2, \dots, B_N . On effectue N tirages **avec remise**, en supposant l'équiprobabilité des résultats. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et N , on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la boule B_i sort lors du $i^{\text{ème}}$ tirage et la valeur 0 dans le cas contraire. On pose :

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

1. Déterminer l'espérance de X_i . En déduire celle de S_N .
2. Pour tout entier naturel k , on note $P(N, k)$ la probabilité de l'événement $S_N = k$.
 - (a) Montrer que $P(N, k) = 0$ lorsque $k > N$ et que :

$$P(N, k) = C_N^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k} \frac{1}{N^k} \quad \text{si} \quad 0 \leq k \leq N$$

- (b) Le nombre entier naturel k étant fixé, déterminer la limite de $P(N, k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.
On commencera par traiter les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.

Partie III

On considère un ensemble E_N à N éléments. Soit s une permutation de E_N , c'est à dire une bijection de E_N sur lui-même. On appelle point fixe de s tout élément a de E_N tel que $s(a) = a$.

Pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq N$, on note $F(N, p)$ le nombre de permutations de E_N qui ont exactement p points fixes. On convient que $F(0, 0) = 1$.

1.
 - (a) Montrer que $F(N, N) = 1$ et $F(N, N - 1) = 0$
 - (b) Montrer que $\sum_{k=0}^N F(N, k) = N!$
2. On pose $\omega_N = F(N, 0)$. ainsi ω_N est le nombre de permutations de E_N qui n'ont aucun point fixe. On convient que $\omega_0 = 1$.
 - (a) Montrer que, pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq N$:

$$F(N, k) = C_N^k \omega_{N-k}$$

- (b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{\omega_{n-k}}{(N-k)!} = 1$$

- (c) En raisonnant par récurrence, établir la relation :

$$\frac{\omega_N}{N!} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!}$$

- (d) Déterminer la limite de $\frac{\omega_N}{N!}$ lorsque N tend vers $+\infty$.

On suppose désormais $N \geq 2$.

Partie IV

On considère à nouveau une urne contenant N boules numérotées de 1 à N : B_1, B_2, \dots, B_N . On effectue N tirages aléatoires, cette fois **sans remise**. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et N , on note Y_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la boule B_i sort lors du i^{eme} tirage et la valeur 0 dans le cas contraire.

1. (a) Déterminer l'espérance de Y_i et celle de $Y_i Y_j$ où $1 \leq i < j \leq N$.
(b) Déterminer la covariance de Y_i et Y_j où $1 \leq i < j \leq N$.
(c) Les variables aléatoires Y_i et Y_j sont elles indépendantes ?
2. On pose $T_N = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$.
Déterminer l'espérance et la variance de T_N .
3. Pour tout nombre entier naturel k , on note $q(N, k)$ la probabilité de l'événement $T_N = k$.

(a) Calculer $q(N, k)$ lorsque $k > N$. Montrer que :

$$q(N, k) = \frac{\omega_{N-k}}{k!(N-k)!} \quad \text{si } k \leq N$$

- (b) Le nombre entier naturel k étant fixé, déterminer la limite de $q(N, k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.
Comparer ce résultat à celui de la question **II.2b**.