CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1994

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2}\,dt - \int_x^1 e^{-nt^2}\,dt$$

   (a) Montrer que f_n est dérivable sur $[0,1]$.
   (b) Etudier le sens de variation de f_n.

2. Montrer qu'il existe un unique réel c_n de $[0,1]$ tel que

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt$$

   Donner la valeur de c_0.

3. On considère la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ des nombres définis à la question précédente; montrer qu'elle est croissante et qu'elle converge vers une limite ℓ appartenant à $[0,1]$.

4. (a) Montrer que, pour tout nombre réel fixé de $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^r e^{nt^2}\,dt = +\infty$

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n on a $\int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt \leqslant 1$.

   (c) En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 2

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on désigne par Γ la partie de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ constituée des matrices dont les trois colonnes sont égales.

1. Soit $T = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$ un élément de Γ. On pose $s = a + b + c$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice T dans la base (e_1, e_2, e_3).
   (a) On suppose dans cette question que $s \neq 0$.
      i. Montrer que les vecteurs
      $$f_1 = e_1 - e_2 \qquad f_2 = e_2 - e_3 \qquad f_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$$
      forment une base de $\mathbb{R}^3$.
      ii. Déterminer la matrice de u dans cette base.
      iii. En déduire les valeurs propres de T.
   (b) On suppose dans cette question que $s = 0$.
      i. Calculer T^2.
      ii. En déduire que T admet 0 pour unique valeur propre.
2. Soit de plus $T' = \begin{pmatrix} a' & a' & a' \\ b' & b' & b' \\ c' & c' & c' \end{pmatrix}$ un autre élément de Γ et $s' = a' + b' + c'$.
   (a) Exprimer le produit TT' en fonction de T.
   (b) A quelles conditions les matrices TT' et T ont-elles les mêmes valeurs propres? (On pourra distinguer le cas $s = 0$ et $s \neq 0$).
3. Soit M un élément de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $M = T + I$ où T appartient à Γ et I est la matrice unuité de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que T n'est pas la matrice nulle.
   (a) Pour tout couple (α, β) de nombres réels, exprimer le produit $M(\alpha I + \beta M)$ comme combinaison linéaire de I et M.
   (b) Trouver les valeurs de s pour lesquelles M possède une matrice inverse la forme $(\alpha I + \beta M)$ et calculer cette inverse.
   Pour les autres valeurs de s, la matrice M est-elle inversible ?
   (c) Montrer que la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer sont inverse.
   (d) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de N.

Exercice 3

1. (a) Rappeler la valeur de la quantité $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
   (b) Déterminer la constante k telle que la fonction f définie par
   $$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
   soit une densité de probabilité.

2. Un barrage alimente l'irrigation d'une région donnée. La quantité d'eau de pluie tombée en un mois en amont du barrage est une variable aléatoire X qui suit une loi de densité f. On suppose que, dans un système d'unités convenablement choisi, la quantité d'eau fournie par le barrage est égale a la variable aléatoire $Q = (1 - ae^{-bX^2})$ où b est un nombre strictement positif et a un nombre tel que $0 < a < 1$.

   (a) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

   (b) Etudier la fonction g définie par $g(x) = (1 - ae^{-bx^2})$.
   Montrer qu'elle admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
   Expliciter la valeur $g^{-1}(y)$ en fonction de y.

   (c) Calculer l'espérance $E(Q)$ et la variance $V(Q)$ de la variable Q en fonction de a et b.

3. Exprimer la probabilité p que Q soit supérieure à une valeur fixée α à l'aide de la fonction de répartition Φ d'une loi normale centrée réduite, de la fonction g^{-1} et de α.