CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1994

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le but du problème est l'étude d'une approximation de $\ln(n!)$ pour les grandes valeurs de l'entier n
Dans la partie I, on établit des majorations qui seront utilisées dans les parties II et III. Dans la partie II, on étudie une suite permettant d'obtenir une première approximation de $\ln(n!)$. Dans la partie III, on établit deux évaluations plus précises de $\ln(n!)$ puis une approximation générale. Enfin dans la partie IV, on étudie un algorithme permettant d'expliciter cette approximation générale. Cette dernière partie utilise uniquement les notations et les résultats de la partie III.
Dans tout le problème, p désigne un entier naturel fixé et n un entier variable supérieur ou égal à 1.

Partie I

1. Vérifier que : $\forall t \neq 1, \quad \dfrac{1}{1-t} = \sum\limits_{i=0}^{p+1} t^i + \dfrac{t^{p+2}}{1-t}$.

   En déduire : $\forall k \geqslant 2, \quad -\ln(1-\dfrac{1}{k}) = \sum\limits_{i=1}^{p+2} \dfrac{1}{ik^i} + \displaystyle\int_0^{1/k} \dfrac{t^{p+2}}{1-t} dt$,

   puis que : $\forall k \geqslant 2, -\ln(1-\dfrac{1}{k}) = \sum\limits_{i=1}^{p+2} \dfrac{1}{ik^i} + \dfrac{a(k)}{k^{p+3}}$ avec $0 \leqslant a(k) \leqslant \dfrac{2}{p+3}$.

2. On désigne par M un réel positif et on envisage une série réelle $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} z_k$ dont le terme général vérifie $|z_k| \leqslant \dfrac{M}{k^{p+2}}$.

   Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} z_k$. Prouver que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall m \geqslant n+1, \quad \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i^{p+2}} \leqslant \int_n^m \frac{dt}{t^{p+2}}.$$

   En déduire :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall m \geqslant n+1, \quad \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i^{p+2}} \leqslant \frac{1}{(p+1)n^{p+1}}$$

   puis que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k \right| \leqslant \frac{M}{(p+1)n^{p+1}}.$$

Partie II : une première approximation de $\ln(n!)$

1. Expression de $\ln(n!)$ à l'aide d'une suite.

   (a) On considère la suite $(v_k)_{k\geqslant 2}$ définie par $v_k = \ln(k) - \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt$.

   Prouver que : $\forall n \geqslant 2, \ln(n!) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k + \int_1^n \ln(t)dt$.

   Expliciter $\displaystyle\int_1^n \ln(t)dt$.

   (b) Etablir que : $\forall k \geqslant 2, v_k = \displaystyle\int_0^1 (\ln(k) - \ln(k-u))du$.

   En déduire que : $\forall k \geqslant 2, \quad v_k = \dfrac{1}{2}(\ln(k) - \ln(k-1)) - \displaystyle\int_0^1 \frac{u - \frac{1}{2}}{k-u} du$.

   Dans la suite de cette partie, on pose : $w_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{u-\frac{1}{2}}{k-u} du$ pour $k \geqslant 2$.

   (c) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \ln(n!) = n\ln(n) - n + \dfrac{1}{2}\ln(n) + 1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k$.

2. Etude de la suite $(w_k)_{k\geqslant 2}$.

   Prouver que $w_k = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{u-u^2}{(k-u)^2} du$ pour $k \geqslant 2$.

   En déduire que $0 \leqslant w_k \leqslant \dfrac{1}{12(k-1)^2}$.

   Ainsi, la série $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} w_k$ converge. On admettra que sa somme a pour valeur $1 - \dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

   On note désormais, dans toute la suite du problème, (ε_n) la suite définie par $\varepsilon_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} w_k$.

3. Evaluation asymptotique de $\ln(n!)$.
Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \varepsilon_n. \tag{1}$$

4. Majoration du reste ε_n.
En utilisant la seconde question de la première partie, établir que : $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{12(n-1)}$ pour $n \geqslant 2$.

Partie III : une approximation générale de $\ln(n!)$.

Cette partie a pour objet d'étudier plus précisément le comportement asymptotique de la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Evaluation de $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$.
A l'aide de l'égalité (1) de la partie II, établir que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = -(k - \frac{1}{2})\ln(1 - (1/k)) - 1.$$

Déduire de la question 1 de la partie I que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \sum_{i=1}^{p} \frac{b_i}{k^{i+1}} + \frac{d(k)}{k^{p+2}} \quad \text{avec} \quad b_i = \frac{i}{2(i+1)(i+2)} \quad \text{et} \quad |d(k)| \leqslant 1. \tag{2}$$

2. Une première évaluation de ε_n.
Dans cette question, on fixe $p = 1$ de sorte que (2) s'écrit

$$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \frac{1}{12k^2} + \frac{d(k)}{k^3}$$

et on pose $r_k = \varepsilon_k - \dfrac{c_1}{k}$, c_1 désignant un nombre réel.

(a) Montrer que : $\forall k \geqslant 2, \dfrac{1}{1 - \frac{1}{k}} = 1 + \dfrac{1}{k} + \dfrac{g(k)}{k^2}$ avec $0 \leqslant g(k) \leqslant 2$.

(b) Déterminer c_1 de sorte que $|r_{k-1} - r_k| \leqslant \dfrac{7}{6k^3}$ pour $k \geqslant 2$.
Le réel c_1 étant ainsi choisi, établir que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k) \right| \leqslant \frac{7}{12n^2}.$$

(c) Prouver que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k) = r_n$ et en déduire :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_1(n)}{n^2} \quad \text{avec} \quad |\lambda_1(n)| \leqslant \frac{7}{12}.$$

3. Une seconde évaluation de ε_n.
Dans cette question, on fixe $p = 2$ de sorte que (2) s'écrit

$$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{12k^3} + \frac{d(k)}{k^4}$$

et on pose $r_k = \varepsilon_k - \dfrac{1}{12k} - \dfrac{c_2}{k^2}$, c_2 désignant un nombre réel.

(a) Montrer que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{1-\dfrac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{g_1(k)}{k^3} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant g_1(k) \leqslant 2.$$

A l'aide de la question 2a, prouver que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{k}\right)^2} = 1 + \frac{2}{k} + \frac{g_2(k)}{k^2} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant g_2(k) \leqslant 8.$$

(b) Vérifier que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad r_{k-1} - r_k = \frac{-2c_2}{k^3} + \left(d(k) - \frac{1}{12}g_1(k) - c_2 g_2(k)\right)\frac{1}{k^4}.$$

Déterminer c_2 de sorte que $|r_{k-1} - r_k| \leqslant \dfrac{7}{6k^4}$ pour $k \geqslant 2$.

(c) Prouver que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_2(n)}{n^3} \quad \text{avec} \quad |\lambda_2(n)| \leqslant \frac{7}{18}.$$

Désormais, dans toute la suite du problème, p désigne un entier fixé non nul.

4. Etude d'un système auxiliaire.
Les réels $b_1, b_2, ..., b_p$ étant définis dans la première question de cette partie, on envisage le système S de p équations linéaires aux p inconnues $x_1, x_2, ..., x_p$ qui s'écrit $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ et A la matrice carrée d'ordre p dont l'élément $a_{i,j}$ situé à l'intersection de la $i^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne est $a_{i,j} = C_i^{j-1}$pour$j \leqslant i$ et $a_{i,j} = 0$ pour $j > i$.
Que valent les éléments diagonaux de A ?
Montrer que S admet une solution et une seule que l'on notera $(c_1, c_2, ..., c_p)$.

5. Evaluation asymptotique de ε_n.
On pose dans cette question $r_k = \varepsilon_k - \sum\limits_{q=1}^{p} \dfrac{c_q}{k^q}$ pour $k \geqslant 1$, $(c_1, c_2, ..., c_p)$ étant la solution du système précédent.

(a) En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à un ordre convenable à la fonction $t \mapsto (1-t)^{-q}$, q désignant un entier compris entre 1 et p, montrer que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{k}\right)^q} = 1 + \sum_{i=1}^{p-q+1} C_{q+i-1}^{i}\frac{1}{k^i} + \frac{q(q+1)...(p+1)}{(p-q+1)!}\int_0^{1/k} \frac{(\frac{1}{k}-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}}dt.$$

Prouver que :

$$0 \leqslant \int_0^{1/k} \frac{(\frac{1}{k}-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}}dt \leqslant \left(\frac{k}{k-1}\right)^{p+2}\int_0^{1/k} u^{p-q+1}du.$$

En déduire que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{k}\right)^q} = 1 + \sum_{i=1}^{p-q+1} C_{q+i-1}^{i}\frac{1}{k^i} + \frac{g_q(k)}{k^{p-q+2}} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant g_q(k) \leqslant C_{p+1}^{q-1}2^{p+2}.$$

(b) En remarquant que

$$\sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{(k-1)^q} - \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q} = \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q} \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^q} - 1 \right),$$

montrer que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{(k-1)^q} - \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{k^{i+1}} + \left(\sum_{q=1}^{p} c_q g_q(k) \right) \frac{1}{k^{p+2}} \quad \text{avec} \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} c_j.$$

(c) On pose $m_p = \max(|c_1|, |c_2|, ..., |c_p|)$ et $M_p = 1 + 2^{2p+3} m_p$.
Prouver que : $\forall k \geqslant 2, \quad |r_{k-1} - r_k| \leqslant \dfrac{M_p}{k^{p+2}}$.

(d) En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{n^q} + \frac{\lambda_p(n)}{n^{p+1}} \quad \text{avec} \quad |\lambda_p(n)| \leqslant \frac{M_p}{p+1}.$$

Partie IV : étude d'un algorithme.

On se propose d'étudier dans cette partie un algorithme de calcul des coefficients $c_1, c_2, ..., c_p$ intervenant dans l'approximation de $\ln(n!)$. On rappelle que ces coefficients constituent la solution du système S défini dans la question 4 de la partie III.
On appelle coût d'un algorithme le nombre total d'additions, de soustractions, de multiplications et de divisions effectués au cours de la mise en œuvre de l'algorithme.
L'entier p étant déclaré en constante, on effectue les déclarations suivantes :

```
type vecteur = array [1..p] of real;
matrice = array [1..p,1..p] of real;
var B,C : vecteur;
A : matrice;
```

1. Ecrire `Procedure SecondMembre( var B : vecteur)` dont le rôle consiste à calculer le second membre B du système S.
   Déterminer un équivalent de son coût lorsque p tend vers $+\infty$.

2. On envisage la procédure suivante :

```
Procedure Coefficients ( var A : matrice);
var i,j :integer;
begin A[1,1] := 1;
for j := 2 to p do A[1,j] := 0;
                  for i := 2 to p do
                                begin A[i,1] := 1;
                                for j := 2 to i-1 do
                                              A[i,j] := A[i-1,j-1]+A[i-1,j];
                                              A[i,i] := i ;
                                              for j := i+1 to p do
                                                            A[i,j] := 0;
                                end;
end;
```

Expliquer le rôle de cette procédure.
Déterminer un équivalent de son coût lorsque p tend vers $+\infty$.

3. Ecrire `Procedure Approximation (A : matrice; B : vecteur; var C : vecteur)` de sorte que, après les appels de `SecondMembre(B)` et de `Coefficients(A)`, l'appel de `Approximation(A,B,C)` produise `C` tel que `C[i]` $= c_i$ pour i de 1 à p.
   Déterminer un équivalent de son coût lorsque p tend vers $+\infty$.

4. Déterminer, lorsque p tend vers $+\infty$, un équivalent du coût total de la détermination des coefficients.