



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT  
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P.-E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE  
MATHEMATIQUES I

Année 1995

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^m$  (où le nombre entier  $m$  est supérieur ou égal à 2) vérifiant certaines relations.

Dans toute la suite, si  $f$  désigne un tel endomorphisme et  $k$  un entier strictement positif, on note  $f^k$  la composée  $\underbrace{f \circ f \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ . Enfin on désigne par  $I$  l'application identité de  $\mathbb{R}^m$  et par  $I_m$  la matrice identité d'ordre  $m$ .

On rappelle que l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^m$  est somme directe de deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  si tout vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^m$  peut se décomposer de manière unique sous forme  $x = y + z$ , avec  $y$  et  $z$  appartenant respectivement à  $F$  et  $G$ . L'application qui à  $x$  associe cet unique vecteur  $y$  est le projecteur de  $\mathbb{R}^m$  sur  $F$  dans la direction  $G$ .

## Partie I

On considère dans cette partie un endomorphisme  $f$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^m$  vérifiant la relation

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + I) \quad (1)$$

1. **Recherche de solutions particulières de (1).**

Déterminer les réels  $a$  tels que  $f = aI$  vérifie (1).

2. **Eude des puissances de  $f$  et de son inversibilité.**

*On suppose dans cette question que les endomorphismes  $f$  et  $I$  sont linéairement indépendants.*

- (a) Exprimer  $f^3$  et  $f^4$  comme combinaison linéaire de  $I$  et de  $f$ .  
 Établir par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , il existe un couple  $(a_n, b_n)$  de nombres réels et un seul tel que :  $f^n = a_n f + b_n I$   
 Déterminer  $a_0, b_0, a_1, b_1$  et exprimer  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) Former une relation entre  $a_{n+2}, a_{n+1}$  et  $a_n$  d'une part et entre  $b_{n+2}, b_{n+1}$  et  $b_n$  d'autre part.  
 En déduire les expressions de  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .  
 Vérifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{3}$
- (c) On convient d'appeler limite de  $f^n = a_n f + b_n I$  l'endomorphisme  $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I$   
 Calculer  $p^2$  et en déduire que  $p$  est un projecteur.
- (d) Prouver que l'endomorphisme  $f$  est inversible et exprimer son inverse  $f^{-1}$  comme combinaison linéaire de  $f$  et de  $I$ .

### 3. Etude des éléments propres de $f$ et des solutions de (1).

- (a) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ . En appliquant la relation (1) à un vecteur propre non nul  $x$  de  $f$  associé à  $\lambda$ , établir que  $\lambda$  vérifie l'équation  $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ . En déduire les valeurs propres éventuelles de  $f$ .
- (b) On suppose donné un vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^m$  écrit sous la forme  $x = y + z$  avec  $y \in \ker(f - I)$  et  $z \in \ker(f + \frac{1}{2}I)$ .  
 Exprimer  $f(x)$  à l'aide de  $y$  et  $z$  puis  $y$  et  $z$  en fonction de  $x$  et  $f(x)$ .  
 En déduire que  $\mathbb{R}^m$  est somme directe de  $\ker(f - I)$  et de  $\ker(f + \frac{1}{2}I)$ , que  $p$  est le projecteur sur  $\ker(f - I)$  dans la direction  $\ker(f + \frac{1}{2}I)$ , et que  $f$  est diagonalisable.
- (c) On pose  $r = \dim \ker(f - I)$  ( $0 \leq r \leq m$ ).  
 Déterminer  $f$  lorsque  $r = 0$  ou  $r = m$ .  
 On suppose désormais  $0 < r < m$ . ...crire la matrice  $M$  de  $f$  dans une base de  $\mathbb{R}^m$  obtenue par réunion d'une base  $(e_1, e_2, \dots, e_r)$  de  $\ker(f - I)$  et d'une base  $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_m)$  de  $\ker(f + \frac{1}{2}I)$ .
- (d) Réciproquement, vérifier que la matrice  $M$  obtenue précédemment satisfait bien la relation  $M^2 = \frac{1}{2}(M + I_m)$
- (e) Calculer  $(f + \frac{1}{2}I) \circ (f - I)$ .  
 En déduire que  $\text{Im}(f - I)$  est inclus dans  $\ker(f + \frac{1}{2}I)$ , et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.

Ainsi donc,  $p$  est aussi le projecteur sur  $\ker(f - I)$  dans la direction  $\text{Im}(f - I)$ .

## Partie II

### 1. Etude d'une suite récurrente.

On étudie dans cette question la convergence des suites complexes  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant pour tout entier naturel  $n$

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1} + u_n}{3} \quad (2)$$

- (a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $r^3 = \frac{r^2 + r + 1}{3}$ . On précisera ses racines et l'on notera  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  ses racines complexes conjuguées.
- (b) Déterminer les suites géométriques  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la relation (2).

(c) On associe à toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la relation (2) le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = u_0 \\ x + \alpha y + \bar{\alpha}z = u_1 \\ x + \alpha^2 y + \bar{\alpha}^2 z = u_2 \end{cases}$$

- En formant la combinaison linéaire  $3u_2 + 2u_1 + u_0$  exprimer  $x$  en fonction de  $u_0, u_1, u_2$  et montrer que le système précédent admet une solution  $(x, y, z)$  et une seule. (On ne demande pas le calcul des inconnues  $y$  et  $z$ .)
- Etablir par récurrence que l'on a pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n = x + \alpha^n y + \bar{\alpha}^n z$ .
- Déterminer le module de  $\alpha$  et en déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en fonction de  $u_0, u_1$  et  $u_2$ .

On considère désormais un endomorphisme  $f$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^m$  vérifiant la relation

$$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I) \quad (3)$$

## 2. Etude des puissances de $f$ et de son inversibilité.

On suppose dans cette question que les endomorphismes  $I, f$  et  $f^2$  sont linéairement indépendants.

- Etablir par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , il existe un triplet  $(a_n, b_n, c_n)$  de nombres réels et un seul tel que  $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$ .  
Déterminer  $a_n, b_n, c_n$  pour  $0 \leq n \leq 2$  et exprimer  $a_{n+1}, b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n, b_n, c_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- Prouver que les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient la relation (2).  
En déduire les limites  $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$  et  $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$  de ces trois suites.
- On convient d'appeler limite de  $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$  l'endomorphisme  $q = af^2 + bf + cI$ . Etablir que  $q$  est un projecteur.
- Prouver que l'endomorphisme  $f$  est inversible et exprimer son inverse  $f^{-1}$  comme combinaison linéaire de  $f^2, f$  et  $I$ .

## 3. Etude du projecteur $q$ .

- Déterminer les valeurs propres réelles éventuelles de  $f$ .  
Existe-t-il un endomorphisme diagonalisable vérifiant (3) ?
- On suppose donné un vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^m$  écrit sous la forme  $x = y + z$  avec  $y \in \ker(f - I)$  et  $z \in \ker(3f^2 + 2f + I)$ . Exprimer  $y$  et  $z$  en fonction de  $x, f(x)$  et  $f^2(x)$ .  
En déduire que  $\mathbb{R}^m$  est somme directe de  $\ker(f - I)$  et de  $\ker(3f^2 + 2f + I)$ , et que  $q$  est le projecteur sur  $\ker(f - I)$  dans la direction  $\ker(3f^2 + 2f + I)$ .
- Calculer  $(3f^2 + 2f + I) \circ (f - I)$ .  
En déduire que  $\text{Im}(f - I)$  est inclus dans  $\ker(3f^2 + 2f + I)$ , et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.

Ainsi donc,  $q$  est aussi le projecteur sur  $\ker(f - I)$  dans la direction  $\text{Im}(f - I)$ .

## 4. Etude des solutions de (3)

- On suppose dans cette question que  $\dim \ker(3f^2 + 2f + I) > 0$ .  
Soit  $e_1$  un vecteur non nul appartenant à  $\ker(3f^2 + 2f + I)$ . Montrer que  $(e_1, f(e_1))$  est une famille libre de  $\ker(3f^2 + 2f + I)$ . En déduire que  $\dim \ker(3f^2 + 2f + I) \geq 2$ .

- (b) On suppose dans cette question que  $m = 2$ . Ainsi  $f$  est-il un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .  
 Déterminer les dimensions possibles de  $\ker(3f^2 + 2f + I)$  et de  $\ker(f - I)$ .  
 En déduire qu'il existe des bases de  $\mathbb{R}^2$  dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme  $f$  est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps  $\mathbb{R}$  ?

- (c) On suppose dans cette question que  $\dim \ker(3f^2 + 2f + I) > 2$ .  
 Soit  $e_2$  un vecteur de  $\ker(3f^2 + 2f + I)$  tel que la famille  $(e_1, f(e_1), e_2)$  soit libre. Montrer que  $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$  est encore une famille libre de  $\ker(3f^2 + 2f + I)$ . En déduire que  $\dim \ker(3f^2 + 2f + I) \geq 4$ .
- (d) On suppose dans cette question que  $m = 3$ . Ainsi  $f$  est-il un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .  
 Déterminer les dimensions possibles de  $\ker(3f^2 + 2f + I)$  et de  $\ker(f - I)$ .  
 En déduire qu'il existe des bases de  $\mathbb{R}^3$  dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme  $f$  est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps  $\mathbb{R}$  ?

- (e) Etudier de la même manière le cas  $m = 4$  en précisant les formes possibles de la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans des bases convenables de  $\mathbb{R}^4$ .
- (f) On suppose désormais  $\dim \ker(3f^2 + 2f + I) > 2q$  avec  $q$  entier naturel non nul.  
 Soit  $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$  une famille libre de vecteurs de  $\ker(3f^2 + 2f + I)$ . On peut donc trouver un vecteur  $e_{q+1}$  appartenant à  $\ker(3f^2 + 2f + I)$  tel que  $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1})$  soit encore une famille libre.  
 Montrer que  $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1}, f(e_{q+1}))$  est une famille libre de  $\ker(3f^2 + 2f + I)$  et en déduire que la dimension de  $\ker(3f^2 + 2f + I)$  est paire.
- (g) On pose  $2r = \dim \ker(3f^2 + 2f + I)$  ( $0 \leq 2r \leq m$ ). ...crire la matrice  $M$  de l'endomorphisme  $f$  dans une base de  $\mathbb{R}^m$  obtenue par réunion d'une base convenable de  $\ker(3f^2 + 2f + I)$  et d'une base de  $\ker(f - I)$ .
- (h) Réciproquement, vérifier que la matrice  $M$  obtenue précédemment satisfait bien la relation  $M^3 = \frac{1}{3}(M^2 + M + I_m)$