CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 1997

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. On dit qu'une fonction $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est concave si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout réel $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Dans la partie I on établit quelques propriétés très classiques des fonctions concaves utilisées dans la suite du problème.
Les parties II et III sont consacrées à un modèle traitant de problèmes financiers.
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel et f une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. On dit que f présente un maximum en un point x_0 de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Partie I

1. Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction concave.
   En s'appuyant sur un dessin, donner une interprétation graphique de la concavité de f. (Que peut-on dire de la fonction $-f\ : x \mapsto -f(x)$) ?

2. On considère dans cette question une fonction $f \in \mathcal{E}$.
   Le but de cette question est de prouver que f est concave si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \leqslant 0$.

   (a) On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \leqslant 0$. Etablir que f est concave.

(b) Réciproquement, on suppose que f est concave.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

En déduire que $f"(x) \leqslant 0$.

3. Soit $f \in \mathcal{E}$ une fonction concave et x_0 un réel tel que $f'(x_0) = 0$.
Montrer que f présente un maximum en x_0.

4. Soit $g \in \mathcal{E}$. On suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que, pour tout réel x, on a : $g"(x) \leqslant -\alpha$.
Prouver que g présente un maximum sur $\mathbb{R}$. Est-il unique en général ?

5. Exemple.

(a) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{E}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f"(x) = -x^2 e^{-x}$. (On pourra intégrer par parties).

(b) Parmi les fonctions du a), déterminer toutes celles présentant un maximum sur $\mathbb{R}$.

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction concave, et p un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des réels positifs ou nuls tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et $x_1, x_2, \ldots, x_p$ des nombres réels.
Etablir que :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

Partie II : Etude d'un modèle financier simplifié.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ l'ensemble fini des résultats possibles susceptibles de se produire à la Bourse. On considère un investisseur $\mathcal{S}$ se donnant, d'une part un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties de Ω, et d'autre part une fonction **concave** $u \in \mathcal{E}$, dite "fonction d'utilité". On suppose qu'entre deux variables (ou revenus) aléatoires définies sur Ω et à valeurs réelles, W_1 et W_2 de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{S}$ préfère W_1 à W_2 si $E(u(W_1)) \geqslant E(u(W_2))$, où $E(u(W_i))$ désigne l'espérance de la variable aléatoire $u(W_i)$.

1. Soit $W : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.
Etablir une inégalité entre $E(u(W))$ et $u(E(W))$.
En déduire le choix de l'investisseur $\mathcal{S}$ entre W et la variable aléatoire égale à la constante $E(W)$.
On considère maintenant un réel positif R_0 et une variable aléatoire $R_1 : \Omega \to \mathbb{R}$. A chaque réel x on associe la variable aléatoire $W(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par :

$$W(x) = (1-x)R_0 + xR_1$$

L'investisseur $\mathcal{S}$ se place en tant qu'acheteur ou vendeur de titres de deux natures, engageant *globalement* une somme unité. La décision x de l'investisseur $\mathcal{S}$ consiste à engager cette somme unité, en négociant pour $1-x$ des titres à revenu fixe R_0 et pour x des titres à revenu aléatoire R_1 (x étant quelconque, les sommes x ou $1-x$ correspondent à un achat si elles sont positives, à une vente si elles sont négatives). La variable aléatoire $W(x)$ représente donc le revenu associé à la décision x.
L'investisseur suppose, *dans cette partie II seulement*, que la variable aléatoire R_1 ne prend que deux valeurs : $R_0 + a$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ et $R_0 - b$ avec probabilité $\frac{1}{2}$, où a et b sont deux réels strictement positifs fixés.

2. Donner, pour chaque réel x, une expression simple de $f(x) = E(u(W(x)))$.
La fonction f ainsi définie est-elle concave ?

3. On suppose que la fonction dérivée u' possède en $+\infty$ (resp. $-\infty$) une limite finie strictement positive notée k_1 (resp. k_2).
Vérifier que $k_1 \leqslant k_2$.

(a) On suppose que :

$$\frac{k_1}{k_2} < \frac{a}{b} < \frac{k_2}{k_1}$$

Montrer que f présente un maximum sur $\mathbb{R}$.

(b) On suppose que f présente un maximum sur $\mathbb{R}$.
Montrer que :

$$\frac{k_1}{k_2} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \frac{k_2}{k_1}$$

Partie III

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel défini par : $< x, y >= \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$. Enfin, on dit qu'une fonction $f\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est concave si, pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$ et tout réel $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

1. Prouver qu'une fonction $f\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est concave si et seulement si, pour tous vecteurs x et h de $\mathbb{R}^3$, la fonction $\phi_{x,h}\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $\phi_{x,h}(t) = f(x + th)$, est concave.

2. On reprend les notations de la question précédente et on suppose que $f \in \mathcal{F}$. Les dérivées partielles du premier ordre de f sont notées $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$. De même, les dérivées partielles du second ordre de f sont notées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ où $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$.

   (a) Soit $(x, h) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$. Exprimer pour chaque réel t, les dérivées première et seconde $\phi'_{x,h}(t)$ et $\phi"_{x,h}(t)$, de l'application $\phi_{x,h}$ en fonction des dérivées partielles de f.

   (b) Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$, on note A_x. la matrice carrée d'ordre trois à coefficients réels :

   $$A_x = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2}$$

   Par abus d'écriture, A_x désignera également l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A_x dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que si les valeurs propres de A_x sont négatives ou nulles alors, pour tout h de $\mathbb{R}^3$, $< A_x(h), h > \leqslant 0$.
   La réciproque est-elle vraie ou fausse ?

   (c) Montrer que f est concave si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, les valeurs propres de A_x sont négatives ou nulles.

   (d) Déterminer les réels λ tels que la fonction f de $\mathcal{F}$ définie par la relation :

   $$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2\lambda x_1 x_3 - x_2^2 + 2\lambda x_2 x_3 - x_3^2$$

   soit concave.

3. Soit f une fonction concave de $\mathcal{F}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^3$, tels que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(y_0) = 0$ pour $j \in [\![1, 3]\!]$.
   Prouver que f présente un maximum en y_0.

4. On considère dans cette question une fonction concave f de $\mathcal{F}$ et c un nombre réel.

(a) Montrer que si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1,c) \leqslant 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,c) \geqslant 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,c) = 0$$

alors $(0,1,c)$ maximise f sur l'ensemble $\Lambda = [0,+\infty[\times]-\infty,1]\times\mathbb{R}$, c'est-à-dire que :

$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \Lambda, \qquad f(x_1,x_2,x_3) \leqslant f(0,1,c)$$

(Pour chaque $(x_1,x_2,x_3) \in \Lambda$, on pourra considérer la fonction de la variable réelle t, $t \mapsto f(tx_1, 1 + t(x_2-1), c + t(x_3 - c)))$.

(b) On suppose au contraire que l'une des trois conditions du a) n'est pas vérifiée.
Etablir que $(0,1,c)$ ne maximise pas f sur Λ.

5. **Etude d'un autre modèle financier simplifié.**
On considère un investisseur $\mathcal{S}$, travaillant dans un univers boursier comme dans la partie II. Il se donne une fonction d'utilité concave $u \in \mathcal{E}$ et un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties de l'ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. On considère maintenant un réel positif R_0 et trois variables aléatoires définies sur Ω, à valeurs réelles, R_1, R_2, R_3.
Pour chaque $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ on définit une nouvelle variable aléatoire sur Ω en posant

$$W(y) = R_0 + \sum_{k=1}^{3}(R_k - R_0)y_k$$

L'investisseur $\mathcal{S}$ se place en tant qu'acheteur ou vendeur de titres de quatre natures, engageant *globalement* une somme unité. La décision $y = (y_1, y_2, y_3)$ de l'investisseur $\mathcal{S}$ consiste à engager cette somme unité, en négociant pour $1 - y_1 - y_2 - y_3$ des titres à revenu fixe R_0 et pour y_k ($k \in [\![1,3]\!]$) des titres à revenu aléatoire R_k. La variable aléatoire $W(y)$ représente donc le revenu associé à la décision y. Les sommes y_1, y_2, y_3 et $1 - y_1 - y_2 - y_3$ correspondent à un achat si elles sont positives; à, une vente si elles sont négatives.

(a) Exprimer $f(y) = E(u(W(y)))$ en fonction des valeurs de R_1, R_2 et de R_3 sur Ω.
Etablir que f est concave. Est-ce que $f \in \mathcal{F}$?

(b) On suppose que $\mathcal{S}$ adopte les contraintes : $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \leqslant 1$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel c, pour que $(0,1,c)$ maximise f sur l'ensemble Λ défini à la question 4.a.