CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

Année 1997

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est constituée d'un exercice et d'un problème indépendants.

Exercice

Etant donné une fonction f continue sur $[0,1]$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$,

$$u_n = \int_0^1 f(x^n)dx.$$

L'objet de l'exercice est d'étudier sur des exemples le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, calculer u_n et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ dans les cas suivants :

   (a) f est la fonction constante égale à a.

   (b) Pour tout $x \in [0,1]$, $\quad f(x) = x$.

   (c) Pour tout $x \in [0,1], f(x) = x^p$, où p est un entier naturel donné.

   (d) Pour tout $x \in [0,1]$, $\quad f(x) = x(1-x)$.

2. Dans cette question, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ pour tout $x \in [0,1]$ et ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

(a) Calculer u_1.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$ est croissante et majorée par 1. Qu'en déduit-on ?

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $1 - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$.

En déduire l'encadrement $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, puis la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(d) En remarquant qu'on a, pour tout x de $[0,1]$, $\dfrac{x^n}{1+x^n} = x\dfrac{x^{n-1}}{1+x^n}$ et en effectuant une intégration par parties, établir l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx.$$

(e) Montrer que pour tout u réel positif, $\ln(1+u) \leqslant u$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)dx \leqslant \frac{1}{n+1}$.

(f) Donner une valeur approchée de $1 - u_{10}$, puis de u_{10} à 10^{-2} près.

Problème

L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$.

I Question préliminaire

Soit T une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

a) Rappeler les valeurs de son espérance et de sa variance ; en déduire la valeur de $E(T^2)$.

b) A l'aide de ce qui précède, déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k}$ et, pour tout entier naturel non nul, établir les inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leqslant 2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} \leqslant 6.$$

II. Etude de la suite de lancers d'une pièce

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'expérience aléatoire consistant en la succession de $n$lancers d'une pièce équilibrée, les résultats ("pile" et "face ") d'un lancer étant indépendants des résultats des autres lancers et se produisant chacun avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$. Un résultat de cette expérience aléatoire est donc une suite ω de n "pile" ou "face". On dispose ainsi d'un espace probabilisé dont on notera Pla probabilité.

Pour tout résultat ω on note, d'une part, $S_n(\omega)$ le nombre de "pile" obtenus au cours des $n$lancers et d'autre part, $T_n(\omega)$ le rang d'apparition du premier "pile" Si au moins un "pile" apparaît dans ω,sinon on pose $T_n(\omega) = 0$. On définit ainsi deux variables aléatoires S_n et T_n.

Par exemple Si $n = 5$, pour$\omega = (P, F, F, P, F)$,alors $S_5(\omega) = 2$ et $T_5(\omega) = 1$;

pour $\omega = (F, F, F, F, F)$ alors $S_5(\omega) = 0$ et $T_5(\omega) = 0$. Les variables aléatoires S_5 et T_5prennent, avec une probabilité non nulle, les valeurs $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

1. Dans cette question $n = 3$.

   (a) Donner la loi du couple (S_3, T_3).

   (b) Donner la loi de T_3 et calculer son espérance.

   (c) Quelle est la loi de S_3 et quelle est son espérance ?

   (d) Les variables S_3 et T_3 sont-elles indépendantes ?

   (e) Calculer les probabilités suivantes :

      i. $P([S_3 = T_3])$

      ii. $P([S_3 = T_3]/[T_3 \neq 0])$

      iii. $P([T_3 = 1]/[S_3 = 2])$

   (f) Donner la loi de la variable produit S_3T_3,calculer son espérance et en déduire le quotient $\dfrac{E(S_3T_3)}{E(S_3)E(T_3)}$.

2. Désormais et jusqu'à la fin du problème on revient au cas général où n désigne un entier naturel non nul. Pour $k = 0$ puis pour tout entier k compris entre 1 et n,calculer la probabilité conditionnelle $P([T_n = k]/[S_n = 1])$.
   Pourquoi ce résultat était-il intuitivement prévisible ?

3. (a) Préciser les valeurs prises par la variable T_n et donner sa loi.

   (b) Pour $x \in [0, 1[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.
   Donner une autre expression de $f(x)$, puis deux expressions de $f'(x)$.
   En déduire la valeur de l'espérance de T_n en fonction de n et montrer que sa limite quand $n \to \infty$ est égale à 2.

   (c) Reconnaître la loi de S_n et préciser son espérance.
   Justifier l'inégalité $S_nT_n \geqslant S_n$ et en déduire que $E(S_nT_n) \geqslant \dfrac{n}{2}$.

   (d) Quand $T_n$prend la valeur k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ quelles valeurs peut prendre S_n ?

   (e) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto x(n + 1 - x)$ définie sur $[0, n + 1]$.
   En distinguant les cas n pair et n impair, donner la valeur maximale que peut prendre la variable S_nT_n.
   En déduire que $E(S_nT_n) \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.

4. On cherche maintenant à obtenir un meilleur encadrement de $E(S_nT_n)$ permettant de calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{E(S_nT_n)}{n}$.
   On admet que $E(S_nT_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k} \times \dfrac{n-k+2}{2}$

   (a) Utiliser la question préliminaire pour montrer que :

   $$\frac{n+2}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} - 3 \leqslant E(S_nT_n) \leqslant n + 2$$

   (b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k} = 2$.

   (c) En supposant que la suite de terme général $\dfrac{E(S_nT_n)}{n}$ converge, déterminer sa limite.

   (d) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{E(S_nT_n)}{E(S_n)E(T_n)}$. Interpréter ce résultat.