CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 1998

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée d'un exercice et d'un problème indépendants.

Exercice

On considère l'application f définie, pour tout réel x par : $f(x) = \left(x^2 + x + 1\right) e^{-\frac{x}{3}}$.

1. (a) Justifier la dérivabilité de la fonction f et donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel p non nul, la dérivée $p^{ième}$ de f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe trois réels a_p, b_p, c_p , tels que, pour tout réel x :

$$f^{(p)}(x) = \left(a_p x^2 + b_p x + c_p\right) e^{-\frac{x}{3}}.$$

   Pour tout entier naturel p non nul, préciser l'expression de $a_{p+1}, b_{p+1}, c_{p+1}$ en fonction de a_p, b_p, c_p.

2. On considère les trois matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(a) Calculer N^2 et N^3. Exprimer A puis A^2 en fonction de I, N et N^2.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, on a :

$$A^p = \left(-\frac{1}{3}\right)^p I + p\left(-\frac{1}{3}\right)^{p-1} N + \frac{p(p-1)}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{p-2} N^2$$

(c) Montrer que A est inversible et préciser son inverse.

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel p non nul, on a :

$$\begin{pmatrix} a_p \\ b_p \\ c_p \end{pmatrix} = A^p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En déduire l'expression de $f^{(p)}(x)$ en fonction de p et de x, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2 et tout réel x.

(b) Etant donné un triplet (α, β, γ) de réels, on considère l'application g définie, pour tout réel x, par : $g(x) = \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) e^{-\frac{x}{3}}$.
Déterminer les réels α, β,et γ pour que $g'' = f$.

(c) Déterminer les fonctions h deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $h'' = f$.

Problème

Dans tout le problème n désigne un entier naturel au moins égal à 3. La question **II.1.** peut être traitée indépendamment de la **partie I**.

Question préliminaire

On note $\{1, 2, ..., n\}$ l'ensemble des entiers compris, au sens large, entre 1 et n.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ si, pour tout entier k de $\{1, 2, ..., n\}$, $\mathbf{P}([X = k]) = \dfrac{1}{n}$.

Calculer l'espérance et la variance d'une telle variable X
(on rappelle que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

I Etude de trois variables aléatoires

Sur un même espace Ω muni d'une probabilité $\mathbf{P}$ on considère trois variables aléatoires mutuellement indépendantes X_1, X_2, X_3, toutes de loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$.
Pour tout $\omega \in \Omega$ on note $(Y_1(\omega), Y_2(\omega), Y_3(\omega))$ la liste réordonnée par ordre croissant à partir de $(X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega))$.
En particulier Y_3 désigne le maximum de X_1, X_2, X_3. Ainsi, par exemple,
si $(X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega)) = (2, 7, 1)$ alors $(Y_1(\omega), Y_2(\omega), Y_3(\omega)) = (1, 2, 7)$ ou
si $(X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega)) = (3, 5, 3)$ alors $(Y_1(\omega), Y_2(\omega), Y_3(\omega)) = (3, 3, 5)$.
On définit ainsi trois variables aléatoires Y_1, Y_2, Y_3.

1. **Loi de** Y_3

(a) Pour tout entier k de $\{1, 2, ..., n\}$ calculer $\mathbf{P}([Y_3 \leqslant k])$.

(b) En déduire que, pour tout entier k de $\{1, 2, ..., n\}$ on a : $\mathbf{P}([Y_3 = k]) = \dfrac{3k^2 - 3k + 1}{n^3}$.

(c) Montrer que l'espérance de Y_3 vaut : $\dfrac{(n+1)(3n-1)}{4n}$

(on rappelle que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$).

2. **Loi de Y_1**
On pose $X_1' = n+1-X_1$, $X_2' = n+1-X_2$, et $X_3' = n+1-X_3$.

   (a) Montrer que X_1', X_2', et X_3' suivent la loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$.
   (b) Montrer que X_1', X_2', et X_3' sont mutuellement indépendantes.
   (c) Soit $Y_3' = \max\left(X_1', X_2', X_3'\right)$. Donner une relation entre Y_3' et Y_1 et en déduire la loi de Y_1 ainsi que son espérance.
   (d) Comparer $X_1 + X_2 + X_3$ et $Y_1 + Y_2 + Y_3$ et déterminer l'espérance de Y_2.

3. **Loi de Y_2**
Pour tout k de $\{1, 2, ..., n\}$ et pour tout $\omega \in \Omega$ on note $Z_k(\omega)$ le nombre d'indices i de $\{1, 2, 3\}$ tels que $X_i(\omega) \leqslant k$. Par exemple si $(X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega)) = (2, 7, 1)$ alors $Z_4(\omega) = 2$ et $Z_1(\omega) = 1$. On définit ainsi des variables aléatoires $Z_1, Z_2, ..., Z_n$.

   (a) Pour tout k de $\{1, 2, ..., n\}$ préciser les valeurs prises par Z_k et montrer que Z_k suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   (b) En remarquant que, pour tout k de $\{1, 2, ..., n\}$ les événements $[Y_2 \leqslant k]$ et $[Z_k \geqslant 2]$ coïncident, calculer $\mathbf{P}([Y_2 \leqslant k])$.

4. **Deux questions d'indépendance**

   (a) Les variables Y_1 et Y_3 sont-elles indépendantes ?
   (b) Les variables X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ? Pour tout k de $\{1, 2, ..., n\}$, calculer la probabilité conditionnelle : $\mathbf{P}([X_1 = Y_1] / [X_1 = k])$.

5. **Quelques calculs de probabilités**

   (a) Démontrer les égalités :

$$\mathbf{P}([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 3] \cap [Y_3 = 5]) = \frac{6}{n^3} \text{ et } \mathbf{P}([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 2] \cap [Y_3 = 5]) = \frac{3}{n^3}.$$

   (b) Pour tout k de $\{1, 2, ..., n\}$ établir l'égalité $\mathbf{P}([Y_1 = Y_2 = k]) = \dfrac{3(n-k)+1}{n^3}$.
   (c) Calculer $\mathbf{P}([Y_1 = Y_2])$.

II. Comportement asymptotique de Y_2

1. **Une densité de probabilité**

   (a) Vérifier que la fonction f définie par :

$$f(x) = 6x(1-x) \text{ si } x \in [0; 1] \text{ et } f(x) = 0 \text{ sinon}$$

   est une densité de probabilité.
   (b) Soit Y une variable aléatoire (définie sur le même espace Ω que dans la première partie) dont f est une densité.
   Calculer $\mathbf{P}\left(\left[\dfrac{1}{4} \leqslant Y \leqslant \dfrac{3}{4}\right]\right)$.
   (c) Déterminer l'espérance de Y. Quelle est la propriété de f qui permettait de prévoir ce dernier résultat ?
   (d) Calculer la variance de Y.
   (e) Soit a un réel positif ou nul.

i. Que vaut $\mathbf{P}\left(\left[\left|Y-\frac{1}{2}\right|\leqslant a\right]\right)$ dans le cas où a est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$?

ii. Citer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire Y et en déduire, en fonction de a une minoration de $\mathbf{P}\left(\left[\left|Y-\frac{1}{2}\right|\leqslant a\right]\right)$.

Pour quelles valeurs de a cette inégalité a-t-elle un intérêt ?

(f) i. Pour a élément de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, calculer $\mathbf{P}\left(\left[\left|Y-\frac{1}{2}\right|\leqslant a\right]\right)$ en fonction de a.

ii. Donner le tableau de variation de l'application ϕ définie, pour a élément de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, par :

$$\phi(a) = -4a^3+3a$$

iii. Pour quelles valeurs de a a-t-on $\mathbf{P}\left(\left[\left|Y-\frac{1}{2}\right|\leqslant a\right]\right)\leqslant\frac{11}{16}$?

2. **Etude de la loi de Y_2 lorsque n tend vers $+\infty$**

On note $[t]$ la partie entière d'un réel t, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à t.

On a ainsi : $t-1<[t]\leqslant t$.

(a) Soit x un réel donné. On admet que la suite de terme général $\frac{[nx]}{n}$ converge. À l'aide d'un encadrement, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{[nx]}{n}$.

(b) Montrer que, pour $x\in[0,1]$, $\mathbf{P}\left(\left[\frac{Y_2}{n}\leqslant x\right]\right)=\frac{[nx]^2}{n^3}(3n-2[nx])$.

En déduire, pour tout réel x, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\left[\frac{Y_2}{n}\leqslant x\right]\right)$ et comparer ce nombre à $\mathbf{P}([Y\leqslant x])$.