



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT  
Direction des Admissions et concours

---

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P.-E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON  
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

OPTION ECONOMIQUE  
MATHEMATIQUES III

Année 2001

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

## Exercice 1

On note  $m$  un paramètre réel et on considère les matrices  $H_m$  définies par

$$H_m = \begin{pmatrix} -1 - m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3 - m \end{pmatrix}$$

On note  $h_m$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  ayant pour matrice  $H_m$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

- On suppose dans cette question que  $m = 2$ .
  - Déterminer les valeurs propres de la matrice  $H_2$  et les sous-espaces propres associés.
  - La matrice  $H_2$  est-elle diagonalisable? Si oui, donner une base de vecteurs propres.
- Etudier de même les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $H_0$ . Cette matrice est-elle diagonalisable?
- Montrer qu'il existe un réel  $a$ , qu'on déterminera, qui est valeur propre de la matrice  $H_m$  pour toutes les valeurs du paramètre  $m$ .
  - Déterminer, pour chaque valeur de  $m$ , le sous-espace propre associé à la valeur propre  $a$ . Montrer qu'on peut trouver un vecteur non nul  $v_1$  appartenant à tous ces sous-espaces.
- Soit  $F$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs  $v_2 = (1, 0, 1)$  et  $v_3 = (1, 1, 0)$ . Déterminer les vecteurs  $h_m(v_2)$  et  $h_m(v_3)$  et montrer que ces vecteurs appartiennent à  $F$  pour tout  $m$  réel.
- En se plaçant dans la base de  $\mathbb{R}^3$  formée des vecteurs  $v_1, v_2$  et  $v_3$ , déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles la matrice  $H_m$  est diagonalisable.

## Exercice 2

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée. On associe à cette expérience une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

*Notation:* Si  $Z$  est une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , on note  $E(Z)$  son espérance.

**N.B.** La partie **II** peut être traitée indépendamment de la partie **I**.

### Partie I. Préliminaire

- (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable  $S_n$ .  
(b) Quelles sont l'espérance et la variance de  $S_n$ ?
- (a) Montrer que pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, on peut trouver une constante  $K_\varepsilon$  telle que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on ait l'inégalité:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{K_\varepsilon}{n}$$

- (b) Dédurre de la majoration obtenue que, pour tout réel  $r$  vérifiant  $0 < r < \frac{1}{2}$ , on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0$$

- Montrer d'autre part, à l'aide du théorème de la limite centrée, que la suite définie pour  $n$  supérieur ou égal à 1 par  $n \rightarrow P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  admet une limite non nulle

*L'objet de la suite de l'exercice est l'étude d'une majoration de la probabilité  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right)$  meilleure que la majoration obtenue à la question 2.a.*

### Partie II. Etude de fonctions

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$ .

- (a) Etudier les variations de  $f$ .  
(b) Montrer qu'il existe des réels  $\alpha$  et  $\beta$ , que l'on déterminera, tels que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$$

- (c) Montrer de même qu'il existe des réels  $\alpha'$  et  $\beta'$  tels que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\alpha'x + \beta')) = 0$$

- Soit  $a$  un réel vérifiant  $0 < a < 1$  et soit  $\phi_a$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi_a(x) = f(x) - ax$$

- (a) Etudier les variations de la fonction  $\phi_a$  et préciser les valeurs de  $\phi_a(0)$  et de  $\phi'_a(0)$ . Montrer que la fonction  $\phi_a$  atteint un minimum en un unique point  $x_a$  de  $\mathbb{R}$  dont on donnera l'expression en fonction de  $a$ .  
(b) Etudier le signe de  $x_a$  suivant les valeurs de  $a$ . Montrer que, pour tout réel  $a$  vérifiant  $a \neq \frac{1}{2}$ , on a:

$$e^{\phi_a(x_a)} < 1$$

*Dans toute la suite, pour tout réel  $a$  vérifiant  $0 < a < 1$ , on pose  $h_a = e^{\phi_a(x_a)}$*

### Partie III. Etude de l'écart de $\frac{S_n}{n}$ à sa moyenne

1. Montrer que si  $Z$  est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs réelles positives  $z_1, \dots, z_r$ , on a la majoration  $P(Z \geq 1) \leq E(Z)$ .
2. Calculer, pour tout réel  $u$  et tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, l'espérance  $E(e^{uS_n})$ . En déduire que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, si  $a$  est un réel vérifiant  $0 < a < 1$  et  $t$  un réel quelconque, on a :

$$E\left(e^{t\left(\frac{S_n}{n} - a\right)}\right) = e^{n\phi_a\left(\frac{1}{n}\right)}$$

3. On suppose dans cette question que  $a$  est un réel vérifiant  $\frac{1}{2} < a < 1$ .

(a) Montrer que, pour tout réel  $t$  strictement positif et tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on a l'inégalité :

$$P\left(\frac{S_n}{n} - a \geq 0\right) \leq e^{n\phi_a\left(\frac{1}{n}\right)}$$

(b) En donnant à  $t$ , dans l'inégalité précédente, une valeur convenablement choisie, établir, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, l'inégalité :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (h_a)^n$$

4. Soit  $\varepsilon$  un réel vérifiant  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ; on pose  $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$ .

(a) Comparer, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, les lois de probabilité des variables aléatoires  $S_n$  et  $n - S_n$ . En déduire l'égalité :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \leq 1 - a\right)$$

puis la majoration :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2(h_a)^n$$

En quoi cette majoration peut-elle être considérée, pour  $\varepsilon$  strictement positif fixé, comme meilleure que celle de la question I.2.a ?

(b) À l'aide de l'expression de  $x_a$  trouvée à la question II.2.a, établir l'égalité

$$\phi_a(x_a) = -\left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\ln(1 + 2\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\ln(1 - 2\varepsilon)\right)$$

(a) En déduire qu'on a :  $\phi_{\frac{1}{2} + \varepsilon}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) = -2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$ , quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

(b) Montrer qu'on peut retrouver ainsi la limite obtenue en I.2.b.

### Partie IV. Etude d'un algorithme

On se propose d'illustrer cet exercice par une simulation. On considère pour cela le programme Turbo-Pascal nommé `Simulation` et reproduit ci-dessous, dans lequel `RANDOM(100)` désigne un nombre entier tiré au hasard à l'ordinateur, avec la loi uniforme, dans l'intervalle  $[[1, 99]]$  (la procédure `RANDOMIZE` sert à initialiser la fonction `RANDOM`).

1. Que fait la procédure EP de ce programme ?

2. Quels nombres entiers sont comptabilisés dans les variables U, V et W à la fin de ce programme?
3. De quels nombres les valeurs P1, P2 et P3 fournies par le programme sont-elles des estimations?
4. À quoi peut-on s'attendre pour la valeur de P1?

```

PROGRAM Simulation;
VAR n,K,U,V,W,i,j,X:integer; S:real;
CONST nombre_de_lancers=20000; nombre_d_essais=2000;
PROCEDURE EP(n:integer);
begin
  S:=0;
  for i:=1 to n do
    begin
      X:=RANDOM(100);
      if X>49 then S:=S+1;
    end;
  end;
end;
BEGIN
RANDOMIZE;
n:=nombre_de_lancers; K:=nombre_d_essais; U:=0; V:=0; W:=0;
for j:=1 to K do
  begin
    EP(n);
    if abs(S/n-0.5) > exp((-0.4)*ln(n)) then U:=U+1;
    if abs(S/n-0.5) > exp((-0.5)*ln(n)) then V:=V+1;
    if abs(S/n-0.5) > exp((-0.9)*ln(n)) then W:=W+1;
  end;
writeln('P1 = ',U/K);
writeln('P2 = ',V/K);
writeln('P3 = ',W/K);
END.

```