CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 2001

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le but de ce problème est l'étude du modèle démographique "Proies et prédateurs" de Vito Volterra.
Dans tout le problème, ln désigne la fonction logarithme népérien, α, β, a, b désignent des réels strictement positifs fixés une fois pour toutes, et on définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}_+^\times$ par :

$$\begin{aligned} \forall x &> 0, f(x) = -\alpha \ln x + \beta x \\ \forall y &> 0, g(y) = -a \ln y + by. \end{aligned}$$

Enfin, on appelle$f$la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^\times)^2$ par : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^\times)^2, F(x, y) = f(x) + g(y)$.

Partie I. Etude de la fonction F

1. Etudier les variations de la fonction$f$et vérifier qu'elle admet un minimum que l'on note m_F; on définit m_G, *mutato nomine*, celui de la fonction g.

2. On note f_1 et f_2 les restrictions respectives de f à $]0, \dfrac{\alpha}{\beta}]$ et à $[\dfrac{\alpha}{\beta}, +\infty[$.

   On note g_1 et g_2 les restrictions respectives de g à $]0, \dfrac{a}{b}]$ et à $[\dfrac{a}{b}, +\infty[$.

   Montrer que f_1 définit une bijection de $]0, \dfrac{\alpha}{\beta}]$ dans un ensemble que l'on précisera. Enoncer des résultats analogues pour f_2, g_1 et g_2.

3. Montrer que f possède un minimum et préciser l'ensemble des points en lesquels celui-ci est atteint. On notera m_F le minimum de F.

Partie II. Etude des lignes de niveau de F

On définit pour tout réel c, l'ensemble $\Gamma_c = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^\times)^2, \quad F(x,y) = c\}$. On se propose d'étudier dans cette partie, la forme de la représentation graphique de Γ_c dans le plan muni d'un repère orthonormé.

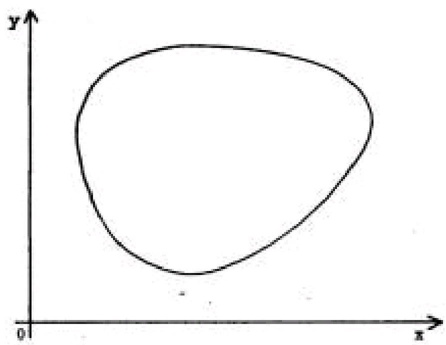
1. Préciser Γ_c lorsque $c < m_F$ et lorsque $c = m_F$.
2. On suppose désormais $c > m_F$.

   (a) Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs u_c et v_c tels que :
   $$u_c < \frac{\alpha}{\beta} < v_c \quad \text{et} \quad m_G = c - f(u_c) = c - f(v_c).$$

   (b) On note K_c l'ensemble des réels strictement positifs x pour lesquels il existe au moins un réel strictement positif y tel que $F(x,y) = c$.
   Montrer que $K_c = [u_c, v_c]$.

   (c)
   - Montrer que, dans le cas où x appartient à $]u_c, v_c[$, il existe deux réels strictement positifs y tels que $F(x,y) = c$ et exprimer ces nombres à l'aide de f, g_1^{-1} et g_2^{-1}.
   - Préciser l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}_+^\times, \quad F(x,y) = c\}$ lorsque d'une part $x = u_c$ et d'autre part $x = v_c$.

   (d)
   - Montrer qu'il existe deux fonctions h_1 et h_2 définies sur $[u_c, v_c]$ telles que :
   $$\forall x \in [u_c, v_c], \quad h_1(x) \leqslant \frac{a}{b} \leqslant h_2(x)$$
   et
   $$\Gamma\quad_c = \{(x, h_1(x)), \quad x \in [u_c, v_c]\} \cup \{(x, h_2(x)), \quad x \in [u_c, v_c]\}$$
   - Justifier la représentation de Γ_c suivante. Préciser les positions des tangentes éventuelles aux points d'abscisses u_c, $\dfrac{\alpha}{\beta}$ et v_c .



Partie III. Etude du cas discret

On considère dans cette partie un réel Δ et un entier n strictement positif; on pose $\delta = \dfrac{\Delta}{,}$. On considère également deux suites de nombres réels strictement positifs $(S_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $(R_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ telles que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad , \begin{cases} \dfrac{S_{k+1} - S_k}{S_k} = \delta(a - bR_k) \\ \dfrac{R_{k+1} - R_k}{R_k} = \delta(-\alpha + \beta S_k) \end{cases}$$

On pose :

$$m = \min_{0\leqslant k\leqslant n} S_k, \quad M = \max_{0\leqslant k\leqslant n} S_k, \quad l = \min_{0\leqslant k\leqslant n} R_k, \quad L = \max_{0\leqslant k\leqslant n} R_k.$$

1. Dans le préambule d'un programme écrit en Turbo-Pascal on a défini les constantes α, β, a, b, n et Δ précédemment introduites.
   Ecrire le corps de la procédure :

   Procedure calcul **(**S0,R0 **: Real ; Var** S, R **: Real) ;**

   qui doit retourner dans S et R les valeurs de S_n et R_n conformément aux relations décrites au début de cette partie, sachant que $S0 = S_0$ et $R0 = R_0$.

2. (a) Pour tout entier k appartenant à $\{0, ..., n-1\}$, calculer $\beta(S_{k+1} - S_k) + b(R_{k+1} - R_k)$ en fonction de S_k et R_k.
   (b) Déterminer, pour tout $p \in \{1, ..., n\}$, $\delta a \beta \sum_{k=0}^{p-1} S_k - \delta \alpha b \sum_{k=0}^{p-1} R_k$en fonction de S_p, S_0, R_p, R_0.
   (c) Montrer que, pour tout $p \in \{1, ..., n\}$:
$$\alpha \sum_{k=0}^{p-1} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} + a \sum_{k=0}^{p-1} \frac{R_{k+1} - R_k}{R_k} = \beta(S_p - S_0) + b(R_p - R_0).$$

3. (a) Montrer que :
$$\forall k \in \{0, ..., n-1\}, \quad \left| \ln(S_{k+1}) - \ln(S_k) - \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \right| \leqslant \frac{(S_{k+1} - S_k)^2}{2m^2}.$$
   (b) En déduire que :
$$\forall k \in \{0, ..., n-1\}, \quad \left| \ln(S_{k+1}) - \ln(S_k) - \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \right| \leqslant \frac{\Delta^2 M^2 (a + bL)^2}{2m^2 n^2}.$$
   (c) Montrer que pour tout $p \in \{1, ..., n\}$:
$$\left| \ln(S_p) - \ln(S_0) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \right| \leqslant \frac{\Delta^2 M^2 (a + bL)^2}{2m^2 n}$$

4. On pose $c = -\alpha \ln(S_0) + \beta S_0 - a \ln(R_0) + b R_0$.
   Déterminer un réel A S'exprimant à l'aide de $\alpha, \beta, a, b, m, M, l$ et L tel que pour tout p appartenant à $\{0, ..., n\}$, on ait :
$$-\alpha \ln(S_p) + \beta S_p - a \ln(R_p) + b R_p - c \leqslant \frac{A}{n}.$$

Partie IV. Etude du cas continu

Dans cette partie on considère deux fonctions S et R définies sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\times$. On suppose que S et R vérifient les relations (E) suivantes :
$$(\mathcal{E}) : \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} \dfrac{S'(t)}{S(t)} = a - bR(t) \\ \dfrac{R'(t)}{R(t)} = -\alpha + \beta S(t) \end{cases}$$

Dans ces relations, S' et R' désignent respectivement les fonctions dérivées de S et R.
Le plan est toujours muni d'un repère orthonormé.

1. (a) Montrer qu'il existe un réel c tel que pour tout réel t positif le point de coordonnées $(S(t), R(t))$ appartient à Γ_c, ensemble introduit dans la partie II.
   (b) En déduire que les fonctions S et R sont bornées.

(c) Que peut-on dire des fonctions S et R si $c = m_F$?
On suppose désormais, et ce jusqu'à la fin du problème, que $c > m_F$.

2. Soit θ un réel positif. On suppose que S' ne S'annule pas sur $[\theta, +\infty[$.

   (a)
   - Montrer que S admet une limite finie en $+\infty$.
   - Montrer que cette limite est strictement positive.

   (b) Montrer qu'il existe un réel λ tel que R' ne S'annule pas sur $[\lambda, +\infty[$. Que peut-on en déduire pour R ?

   (c)
   - Montrer que S' admet une limite en $+\infty$.
   - Montrer que cette limite est nulle en considérant la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\theta}^{+\infty} S'(t)dt$.

   (d) Montrer également que $R'(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

   (e) En considérant les limites de S et R en $+\infty$, montrer qu'on arrive à une contradiction. En déduire que S'annule en une infinité de points.

3. On considère dans cette question deux réels positifs τ_1 et τ_2 distincts tels que $S'(\tau_1) = S'(\tau_2) = 0$, et on suppose : $\tau_1 < \tau_2$.

   (a) Montrer qu'il existe θ appartenant à $]\tau_1,\tau_2[$ tel que $R'(\theta) = 0$.

   (b) En considérant les valeurs de S en θ et τ_1, montrer qu'il existe un réel λ strictement positif et indépendant de τ_1 et τ_2 tel que $|S(\theta) - S(\tau_1)| \geqslant \mu$.

   (c) Montrer que S' est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

   (d) Montrer qu'il existe un réel η strictement positif et indépendant de τ_1 et τ_2 tel qne $|\tau_2 - \tau_1| > \eta$.

4. (a) Montrer qu'on peut trouver trois réels positifs θ_1, θ_2, $\theta_3$tels que :
$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \quad \text{et} \quad S'(\theta_1) = S'(\theta_2) = S'(\theta_3) = 0.$$

   (b) Montrer que S' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $[0, \theta_3]$.

   (c) En déduire qu'il existe trois réels positifs t_1, t_2, t_3 tels que $t_1 < t_2 < t_3$ tels que :
$$0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \quad \text{et} \quad \forall t \in [t_1, t_3], \quad S'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{t_1, t_2, t_3\}$$

5. Montrer que S' est de signe constant sur $]t_1, t_2[$ et sur $]t_2, t_3[$ et que les signes respectifs de S' sur ces deux intervalles sont opposés. On pourra considérer les valeurs de R en t_1, t_2, t_3.
Dans la suite on supposera que S' est positif sur $]t_1, t_2[$ et donc négatif sur $]t_2, t_3[$.

6. (a) Montrer que $S(t_1) = S(t_3) = u_c$ et $S(t_2) = v_c$.

   (b) Déterminer les valeurs de $R(t_1)$ et $R(t_3)$.

7. (a) Sur un même tableau de variation faire apparaître les variations de S et de R sur $[t_1, t_3]$.

   (b) En déduire le sens de déplacement du point M_t de coordonnées $(S(t), R(t))$ sur la représentation graphique de Γ_c lorsque t décrit $[t_1, t_3]$.

8. *On admet que si (S_1, R_1) et (S_2, R_2) sont deux couples de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\times$, vérifiant les relations (E) et s'il existe un réel $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $S_1(t_0) = S_2(t_0)$ et $R_1(t_0) = R_2(t_0)$, alors :*
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad S_1(t) = S_2(t) \quad \text{et} \quad R_1(t) = R_2(t).$$

   Montrer que les fonctions S et R sont périodiques de période $T = t_3 - t_1$.

9. On considère un réel u positif.

   (a) Calculer $\displaystyle\int_u^{u+T} \frac{S'(t)}{S(t)}dt$.

   (b) En déduire la *valeur moyenne* de R sur le segment $[u, u+T]$, c'est-à-dire :$\displaystyle\frac{1}{T}\int_u^{u+T} R(t)dt$.

   Déterminer de même la *valeur moyenne* de S sur le segment $[u, u+T]$.

10. On considère dans cette question deux fonctions K et H définies sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\times$. On considère également un réel ε appartenant à $]0, a[$. On suppose que K et H vérifient les relations $(E")$ suivantes :

$$(\mathcal{E}') : \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} \dfrac{K'(t)}{K(t)} = a - \varepsilon - bH(t) \\ \dfrac{H'(t)}{H(t)} = -\alpha - \varepsilon + \beta K(t) \end{cases}$$

Dans ces relations, K' et H' désignent respectivement les fonctions dérivées de K et H.
Montrer qu'il existe un réel Θ strictement positif tel que les fonctions K et H sont périodiques de période Θ et déterminer la valeur moyenne de ces fonctions sur un segment de longueur égale à Θ.

Partie V. Le contexte historique du modèle de Vito Volterra

On peut voir dans les calculs qui précèdent une représentation de l'évolution d'une population d'individus de deux types : les proies et les prédateurs. Ceux-ci se nourrissent uniquement de celles-là, et celles-là d'une autre nourriture disponible en abondance. Les proies, en l'absence de prédateurs, se développeraient de façon exponentielle, mais cette croissance est en fait réduite par la présence des prédateurs. En revanche, le nombre de prédateurs, en l'absence de proies, décroîtrait de manière exponentielle, (sans proies ils finiraient par disparaître), laquelle décroissance est compensée par la présence des proies.
Supposons alors que cette population soit une population de poissons constituée de proies et de prédateurs d'effectifs relatifs $K(t)$ et $H(t)$ à l'instant t, (les fonctions K et H ont été introduites à la question 10 *de la partie IV); la constante ε apparaissant dans les relations $(\mathcal{E}')$ représente un taux de pêche identique pour les proies et les prédateurs.*
Au cours de la première guerre mondiale, on a pu constater, dans l'Adriatique, qu'une diminution de la pêche était défavorable aux proies.

Montrer que les calculs de la question IV. 10 expliquent directement le phénomène observé.