CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 2005

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On rappelle que pour k et n entiers naturels, on note $\binom{n}{k}$ le nombre «k parmi n» défini par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pourra aussi noter ce nombre C_n^k.

Partie I

Dans cette partie, n désigne un nombre entier naturel non nul et x un nombre réel.

1. (a) Montrer que, pour k entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

   (b) En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n\,(1+x)^{n-1}$.

   (c) Montrer de même que si $n \geqslant 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2} = n\,(n-1)\,(1+x)^{n-2}$.

2. Calculer les deux sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k$$

3. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{n+1} \left((1+x)^{n+1} - 1 \right)$$

4. Soit E un ensemble fini ayant a éléments et F un ensemble fini ayant b éléments, avec a et b dans $\mathbb{N}$. On suppose que E et F sont disjoints. Soit k un nombre entier tel que $0 \leqslant k \leqslant a+b$.

   (a) Quel est le nombre de parties de $E \cup F$ ayant k éléments ?

   (b) Soit j entier naturel tel que $0 \leqslant j \leqslant k$. Quel est le nombre de parties de $E \cup F$ ayant k éléments et contenant j éléments de E ?

   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{a}{j} \binom{b}{k-j} = \binom{a+b}{k}$.

   (d) En développant de deux façons l'identité suivante, valable pour tout réel x :

$$(1+x)^{a+b} = (1+x)^a (1+x)^b \ ,$$

   retrouver la relation précédente.

Partie II

Les variables aléatoires qui interviennent dans cette partie sont définies sur un même espace probabilisé Ω muni d'une probabilité P. Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul et p est un réel tel que $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.

1. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. On a donc :

$$\text{pour } j \in \mathbb{N}, \text{ tel que } 0 \leqslant j \leqslant n, \ P(X = j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$$

   Rappeler, sans démonstration, les expressions de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X, en fonction de n et p.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi binomiale de paramètres a et p, et Y suit la loi binomiale de paramètres b et p, a et b étant deux entiers naturels non nuls fixés. On pose $Z = X + Y$ et on cherche à déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.

   (a) Montrer que l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par Z est : $Z(\Omega) = \{0, 1, ..., a+b-1, a+b\}$.

   (b) Calculer l'espérance $E(Z)$ et la variance $V(Z)$ de Z.

   (c) Pour $k \in \{0, 1, ..., a+b-1, a+b\}$, montrer que :

$$(Z = k) = \bigcup_{\substack{0 \leqslant i \leqslant a \\ 0 \leqslant j \leqslant b \\ i+j=k}} [(X = i) \cap (Y = j)]$$

   (d) En déduire, pour $k \in \{0, 1, ..., a+b-1, a+b\}$, l'égalité : $P(Z = k) = \displaystyle\binom{a+b}{k} p^k q^{a+b-k}$.

   (e) Conclure.

3. Pour tout entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant a$ et tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant a+b$, on cherche à évaluer la probabilité conditionnelle $P_{(Z=k)}(X=i)$ (probabilité conditionnelle de l'événement $(X=i)$ sachant que l'événement $(Z=k)$ est réalisé).

    (a) Montrer que si $i \leqslant k$, on a : $[(X=i) \cap (Z=k)] = [(X=i) \cap (Y=k-i)]$. Que se passe-t-il si $i > k$?

    (b) En déduire la loi conjointe du couple (X, Z), puis la probabilité conditionnelle $P_{(Z=k)}(X=i)$.

4. On désigne par $\operatorname{cov}(X, Z)$ la covariance des deux variables aléatoires X et Z.
Montrer que $\operatorname{cov}(X, Z) = V(X)$ et en déduire le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Z}$ de X et Z.

5. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $U = \dfrac{1}{X+1}$.

EXERCICE 2

L'objet de cet exercice est l'étude de quelques propriétés mathématiques de la valeur actualisée nette d'un projet d'investissement et du taux de rentabilité interne de ce projet.

Une entreprise envisage d'acquérir un nouveau matériel dont le prix est égal à I et dont la durée de vie est estimée à n années (n entier naturel non nul donné), sans valeur résiduelle (au terme des n années, le prix de revente du matériel est nul).

Pour k entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, l'utilisation de ce nouvel investissement procurera à l'entreprise, à la fin de la $k^{ième}$ année, une recette nette R_k.

On suppose que les réels $I, R_1, ..., R_n$ sont strictement positifs.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = -I + \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+x)^k}$$

(pour un taux d'actualisation égal à $100x$ (en %) le réel $f(x)$ représente la valeur actualisée nette du projet d'investissement).

Dans les parties **I** *et* **II***, on suppose que l'entier n et les réels $R_1, ..., R_n$ sont donnés et vérifient l'inégalité suivante :*

$$\sum_{k=1}^{n} R_k > I$$

Partie I

1. Établir le tableau des variations de la fonction f.

2. (a) Donner l'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal. Préciser les branches infinies de cette courbe.

    (b) La fonction f est-elle convexe sur son intervalle de définition ?

3. Montrer qu'il existe un unique réel $\overline{x}$ tel que $f(\overline{x}) = 0$. Vérifier que $\overline{x}$ est strictement positif. (le réel $\overline{x}$ représente le taux de rentabilité interne associé au projet d'investissement).

Partie II

Dans cette partie, on suppose que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, $R_k = R$, c'est-à-dire que tous les réels $R_1, ..., R_n$, sont égaux, leur valeur commune étant le réel strictement positif noté R.

1. (a) Pour q réel, rappeler l'expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k$ en fonction de q et n.

   (b) En déduire l'expression suivante de f :

$$f(x) = \begin{cases} R \times \dfrac{1-(1+x)^{-n}}{x} - I & \text{si} \quad x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ nR - I & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

2. *On rappelle que $\overline{x}$ désigne l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ (voir la question* **3** *de la partie* **I**).
   Écrire la relation vérifiée par $\overline{x}$, R , I et n. En déduire que si on pose $\overline{X} = 1 + \overline{x}$, on a :

$$\overline{X}^{n+1} - \left(1 + \frac{R}{I}\right)\overline{X}^n + \frac{R}{I} = 0$$

3. (a) Soit h la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$h(t) = t^{n+1} - \left(1 + \frac{R}{I}\right)t^n + \frac{R}{I}$$

   Calculer $h(1)$, $h(1+R)$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} h(t)$.

   (b) Dresser le tableau des variations de h et montrer que h admet un *minimum* atteint pour une valeur t_0 de t, que l'on déterminera. Montrer que t_0 est strictement supérieur à 1 et que $h(t_0)$ est strictement négatif.

   (c) Montrer qu'il existe un unique réel $\overline{X}$ appartenant à l'intervalle $\left]t_0, 1 + \dfrac{R}{I}\right[$, tel que $h\left(\overline{X}\right) = 0$. En déduire les inégalités suivantes :

$$0 < \frac{1}{n+1}\left(n\frac{R}{I} - 1\right) < \overline{x} < \frac{R}{I}$$

Partie III

On reprend dans cette partie, les mêmes hypothèses que celles de la partie II, mais on ne suppose plus que l'entier strictement positif n est fixé. Ainsi, les réels strictement positifs I et R sont donnés et pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on a $R_k = R$.

On note alors $f_n(x) = -I + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{R}{(1+x)^k}$.

On pose $a = \dfrac{R}{I}$ et on désigne par A la partie de $\mathbb{N}^\times$ formée de tous les entiers n qui vérifient $n > \dfrac{1}{a}$: $A = \left\{n \in \mathbb{N}^\times \ / \ n > \dfrac{1}{a}\right\}$.

1. (a) Soit $(a_n)_{n\in A}$ la suite définie pour tout n, appartenant à A, par l'égalité : $a_n = \dfrac{1}{n+1}(na-1)$.
   Étudier la monotonie et la convergence de cette suite.

   (b) Pour n appartenant à A, on désigne par $\overline{x_n}$ la solution strictement positive de l'équation $f_n(x) = 0$.
   Montrer que $0 < a_n < \overline{x_n} < a$.
   En déduire la limite de la suite $(\overline{x_n})_{n\in A}$.

2. (a) Pour $n \in A$, on pose $K_n = \int\limits_{a_n}^{a} f_n(x)\, dx$.

Montrer l'égalité :

$$K_n = a_n I - R + R \ln\left(\frac{R}{a_n I}\right) - R \int\limits_{a_n}^{a} \frac{dx}{x(1+x)^n}$$

(b) Montrer que l'on a : $0 \leqslant \int\limits_{a_n}^{a} \frac{dx}{x(1+x)^n} \leqslant \frac{1}{(n-1)a_n}\left[\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n-1}\right]$.

(c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_{a_n}^{a} \frac{dx}{x(1+x)^n} = 0$.

(d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n$.