CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 2006

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve comprend trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Une société de location de voitures possède trois agences, une à Rennes, une à Lyon, une à Marseille.
Lorsqu'un client loue une voiture, un jour donné, dans une des trois villes, il la restitue le jour même dans une des trois agences.
On suppose qu'une voiture donnée n'est louée qu'une seule fois dans la journée.
Une étude statistique a permis de montrer que, pour une voiture donnée :

- si elle est louée à Rennes un certain jour, alors elle est laissée le soir à Lyon avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, tandis qu'elle est laissée à Marseille avec la probabilité $\dfrac{3}{4}$;
- si elle est louée à Lyon, alors elle est laissée à Rennes avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, laissée à Marseille avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, et ramenée à Lyon avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$;
- si elle est louée à Marseille, elle est laissée à Rennes avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, laissée à Lyon avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, et ramenée à Marseille avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note R_n (respectivement L_n, M_n) l'événement « la voiture se trouve à Rennes (respectivement Lyon, Marseille) le soir du n-ième jour ».
On considère les probabilités suivantes : $r_n = P(R_n)$, $l_n = P(L_n)$, $m_n = P(M_n)$.
On suppose qu'au départ, la voiture est à Rennes, et on pose donc : $r_0 = 1$, $l_0 = 0$, $m_0 = 0$.
On désigne par I la matrice identité d'ordre 3, définie par : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on définit la matrice colonne à trois lignes U_n par : $U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ l_n \\ m_n \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a la relation $U_{n+1} = AU_n$, où A est la matrice carrée d'ordre 3 suivante :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

   (b) Expliciter U_0. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_n = A^n U_0$.

2. On se propose dans cette question de calculer A^n.

   On considère la matrice S ,carrée d'ordre 3, définie par : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que la matrice S est inversible et calculer explicitement sa matrice inverse S^{-1}.
   (b) On pose $\Delta = S^{-1}AS$. Expliciter, sous forme de tableau, la matrice Δ.
   (c) Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$, l'expression sous forme de tableau de la matrice Δ^n.
   (d) Exprimer A en fonction de S, S^{-1} et Δ. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$, on a $A^n = S\Delta^n S^{-1}$.
   (e) Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$, l'expression sous forme de tableau de A^n.

3. (a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$, r_n, l_n, m_n en fonction de n.
   (b) Déterminer les limites de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$.

4. Le soir d'un jour donné, si on désire, où qu'elle se trouve, rapatrier la voiture à Rennes, le coût de cette opération est de 100 euros si la voiture est à Lyon, de 150 euros si la voiture est à Marseille, et évidemment nul si la voiture est à Rennes.
   On note X_n la variable aléatoire égale au coût de cette opération le soir du n-ième jour.

   (a) Donner la loi de X_n.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X_n.

EXERCICE 2

On désigne par f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ et on considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_0 = \int_0^1 f(x)dx \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^{\times}, \quad I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$$

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour différentes fonctions f.

1. Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$.

   (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$I_n = \frac{1}{n+1}\left(\ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}dx\right).$$

   (b) Etablir, pour tout x de $[0,1]$, l'encadrement : $0 \leqslant \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2} \leqslant x^{n+2}$.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2}dx = 0$.

   (d) Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

2. Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

   (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ en fonction de n.

   (b) Etudier la monotonie éventuelle de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) En déduire, pour tout n supérieur ou égal à 2 , l'encadrement :
$$\frac{1}{3(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{3(n-1)}.$$

   (d) Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

3. Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = e^{-x}$, où e désigne la base des logarithmes népériens.

   (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

   (b) Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la valeur de la limite de la suite quand n tend vers $+\infty$.

   (c) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, I_{n+1} en fonction de I_n.

   (d) En déduire la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{(x+10)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Partie 1

1. Vérifier que f possède toutes les propriétés d'une densité de probabilité.
Dans toute la suite de cet exercice, on considère une variable réelle X ayant f pour densité.

2. Déterminer la fonction de répartition de F de X.

3. En déduire la probabilité de l'événement $(X > 10)$.

4. (a) Vérifier que, pour tout réel x positif ou nul, $xf(x) = 10 \times \left[\dfrac{1}{x+10} - \dfrac{10}{(10+x)^2}\right]$.

   (b) Calculer, pour tout réel α strictement positif, l'intégrale $\int_0^\alpha xf(x)dx$.

   En déduire la valeur de $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int_0^\alpha xf(x)dx$.

   (c) La variable aléatoire X admet-elle une espérance mathématique ?

Partie 2

Un appareil constitué de 6 composants fonctionne tant que quatre au moins d'entre eux sont en état de marche.
La durée de vie, en heures, de chaque composant est une variable aléatoire réelle suivant la même loi que X.
On suppose que les durées de vie des différents composants sont mutuellement indépendantes.
On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de ces composants qui sont encore en état de marche au bout de cinq heures.

1. (a) Quelle est la probabilité qu'un composant quelconque fonctionne encore au bout de cinq heures ?
   (b) Reconnaître la loi de Y.
2. Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne encore après cinq heures d'utilisation ?

Partie 3

Un autre appareil est constitué de deux composants semblables aux précédents, montés de telle façon que dès que l'un des deux composants tombe en panne, l'appareil est en panne.
Soit X_1 et X_2 les variables aléatoires égales à la durée de vie de ces composants; on suppose toujours que X_1 et X_2 sont indépendantes et qu'elles suivent la même loi que X.
On note Z la durée de vie de l'appareil et on admet que Z est une variable aléatoire à densité.
On désigne par G la fonction de répartition de Z et par g une densité de Z.

1. Justifier que $Z = \inf(X_1, X_2)$.
2. (a) Déterminer, pour tout réel x strictement positif, la probabilité de l'événement $(Z > x)$.
   (b) Calculer, pour tout réel x , $G(x)$ et $g(x)$.
3. (a) Trouver deux réels a et b tels que, pour tout réel x positif ou nul, on ait :
   $$\frac{x}{(x+10)^3} = \frac{a}{(x+10)^2} + \frac{b}{(x+10)^3}.$$
   (b) En déduire que Z possède une espérance mathématique $E(Z)$ et la calculer.
4. On constate que cet appareil fonctionne toujours au bout de dix heures. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore au moins cinq heures de plus ?