ICN 1978 Option générale

PROBLEME 1

Dans tout le problème n et k désignent deux entiers vérifiant $n \geqslant 4$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.

PARTIE I

1. Etudier les variations des fonctions f_k définies sur $[0, 1]$ par

$$f_k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

et construire sommairement leurs représentations graphiques.

2. Calculer $\int_0^1 f_k(x)dx$.

PARTIE II

Une population Ω se compose de deux types d'individus A et $\overline{A}$. La population est trop nombreuse pour qu'on puisse recenser le nombre d'individus du type A. On appelle x la proportion d'individus du type A, on désire estimer x.
On constitue un échantillon de n individus en effectuant n tirages successifs avec remise dans la population Ω et on appelle N la variable aléatoire égale au nombre d'individus du type A de l'échantillon.

1. Donner en fonction de x la loi de probabilité, l'espérance mathématique et l'écart-type de N.

2. Soit s un entier strictement positif.
On suppose que la proportion d'individus du type A dans Ω est une variable aléatoire X_s prenant les valeurs $0, \frac{1}{s}, ..., \frac{s}{s}$ avec des probabilités égales.

3. (a) Exprimer à l'aide de f_k la probabilité : $p_k(s) = P(N = k)$
Déterminer, en utilisant la première partie : $\lim_{s \to +\infty} p_k(s)$.

   (b) Pour $i \in [\![0, s]\!]$, exprimer à l'aide de f_k la probabilité conditionnelle $q_i = P\left(X_s = \frac{i}{s} / N = k\right)$.

4. On réalise l'échantillon, on y trouve k éléments du type A. On va estimer x par deux méthodes différentes

   (a) *Première méthode*
   On décide d'estimer x par l'ensemble des nombres $\frac{j}{s}$ tels que $q_j = \max_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ 0 \leqslant i \leqslant n}} q_i$.

   - Déterminer les estimations possibles de x en utilisant la première partie.
   - Comment choisir s et n pour que l'estimation soit unique ?

   (b) *Deuxième méthode*
   On appelle Y_s la variable aléatoire qui prend les valeurs $\{0, \frac{1}{x}, \frac{2}{s}, ..., \frac{s}{s}\}$ avec les probabilités respectives $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_s$. On décide d'estimer x par la limite lorsque s tend vers $+\infty$ de l'espérance mathématique de Y_s.
   Calculer cette estimation de x.

PROBLEME 2

On donne un espace vectoriel réel E de dimension 3 et un endomorphisme f de E.
On pose $f^2 = f \circ f$ et pour k entier supérieur à 2, $\quad f^{k+1} = f \circ f^k$
On suppose que f vérifie les deux propriétés suivantes :

- f non bijective
- il existe un entier n supérieur ou égal à 2 et un vecteur u de E tel que u, $f(u)$ et $f^2(u)$ engendrent E et tel que $f^{2n}(u) = f(u)$.

PARTIE I

1. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

2. - Calculer a et b pour $n = 2$
   - On suppose $n = 3$.
     Démontrer que a et b sont solutions du système

     $$(S) : \begin{cases} 2a^2b + ab^3 = 1 \\ 3ab^2 + a^2 + b^4 = 0 \end{cases}$$

     Effectuer le changement d'inconnues $x = \dfrac{b^2}{a}$ et $y = a^2 b$ dans le système (S), résoudre le système obtenu et en déduire d'abord a puis b.

PARTIE II

1. Sans utiliser la matrice M démontrer que $f^{2n} = f$.

2. - Etablir que

     $$\begin{aligned} \ker f &= \ker f^2 = \cdots = \ker f^{2n}. \\ \operatorname{Im} f &= \operatorname{Im} f^2 = \cdots = \operatorname{Im} f^{2n}. \end{aligned}$$

   - Déterniner $\ker f \cap \operatorname{Im} f$

3. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de f soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont les mêmes nombres que ceux de la matrice M.

4. On se propose de déterminer a et b.

   - Démontrer que le polynôme $P(x) = x^3 - bx^2 - ax$ divise le polynôme $Q(x) = x^{2n} - x$.
   - En déduire les racines de $P(x)$ puis les valeurs de a et b.