ICN 1979

1er problème

On désigne par

- E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3
- $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
- $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, d'élément neutre 0 et d'élément unité I.
- U un élément de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ différent de 0 et I.
- φ_U l'application $\varphi_U : \left\{ \begin{array}{lll} \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & U.X - X.U \end{array} \right.$

I - Démontrer que φ_U est un endomorphisme non bijectif.

II - On suppose qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et une matrice inversible P de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ tel que

$$U = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

1. Pour $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$, on pose $N_{i,j} = PM_{i,j}P^{-1}$, où $M_{i,j}$ est la matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ formée de 0 sauf l'élément de la $i^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne qui vaut 1.
   Démontrer que $(N_{i,j})_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ est une base de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$
2. Calculer $\varphi_U(N_{i,j})$.
   Donner une base de $\operatorname{Im}\varphi_U$ et de $\ker\varphi_U$.
   Dans le cas où les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont distincts deux à deux, donner l'expression générale des matrices de $\operatorname{Im}\varphi_U$ en fonction de P et P^{-1}.
3. Soit f un endomorphisme de E de matrice $M = (a_{i,j})$ dans la base B.
   On suppose que $a_{1,3}.a_{2,3} \neq 0$ et que $a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = 0$.
   Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on pose $e'_1 = e_1 + \alpha e_3$, $\quad e'_2 = e_2 + \beta e_3$ et $e'_3 = e_3$.
   Démontrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
   Démontrer que l'on peut choisir α et β tel que la matrice de f dans la base B' soit $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & h & 0 \end{pmatrix}$.
   Déduire des questions précédentes qu'il existe deux endomorphismes de E, g et h tels que $f = g \circ h - h \circ g$.

2ème problème

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par E_n l'ensemble des fonctions f définies et deux fois dérivables sur $[0, +\infty[$ vérifiant

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 4xf''(x) + (2-4n)f'(x) + f(x) = 0.$$

I - Soit la fonction h définie par $h(x) = \cos\sqrt{x}$.

1. Etudier les variations de h.
   Construire la courbe représentative de h sur $[0, 4\pi^2]$.

2. Démontrer que $h \in E_0$.

II - Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère une suite g_n de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} g_0 \in E_0 \\ g(x) = \int\limits_0^x g_{n-1}(t)dt + (4n-2)g_{n-1}(0) \text{ si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

1. a) Démontrer que $g_n \in E_n$.
   b) Déterminer pour $n \geqslant 2$ la relation existant entre g_{n-2}, g_{n-1} et g_n.
2. On suppose $g_0 = h$.
   a) Calculer g_1.
   b) Démontrer qu'il existe deux suites de fonctions polynômes P_n et Q_n telles que :

   $$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g_n(x) = P_n(\sqrt{x}) \cos \sqrt{x} + Q_n(\sqrt{x}) \sin \sqrt{x}.$$

   Donner une relation de récurrence permettant de calculer P_n et Q_n.
   Application : calculer g_2.