ICN 1980

1er problème

On considère la fonction numérique d'une variable réelle $f_{(\alpha,\beta)}$ définie par $f_{(\alpha,\beta)}(x) = x^\alpha \ln\left(1+\dfrac{1}{x^\beta}\right)$ où α et β sont deux réels strictement positifs.

1. Etudier les variations et construire la courbe représentative de $f_{(1,1)}$.
2. (a) Déterminer l'ensemble de définition de $f_{(\alpha,\beta)}$.
   (b) Déterminer les limites de $f_{(\alpha,\beta)}$ en 0 et en $+\infty$.
3. (a) Etudier la convergence des intégrales impropres :
$$\int_0^1 f_{(\alpha,\beta)}(x)dx, \quad \int_1^{+\infty} f_{(\alpha,\beta)}(x)dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f_{(\alpha,\beta)}(x)dx$$
   (b) Calculer $\int_0^{+\infty} f_{(\alpha,\beta)}(x)dx$ pour $\beta = 2(1+\alpha)$.

2ème problème

On donne

- un entier n supérieur ou égal à 2
- un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
- deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, ..., n+1\}$.

Pour $(i,j) \in \{1, 2, .., n+1\}^2$, $b_{i,j}$ désigne une probabilité conditionnelle. On appelle A et B les matrices carrées d'ordre $n+1$ de terme général respectif $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.

I - Dans cette question, on suppose qu'il existe une constante réelle k telle que $a_{i,j} = kC_n^{i-1}C_n^{j-1}$.

1. Quelle est la somme des éléments de la matrice A ?
   En déduire k puis A.
2. Donner les lois de probabilités de X et de Y.
   Reconnaitre la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X - 1$.
   Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X.
3. Etudier l'indépendance de X et Y.
   Déterminer la matrice B.
   Calculer B^α pour $\alpha \in \mathbb{N}^\times$. En déduire les valeurs propres de B.

II - Dans cette question, on suppose que $a_{i,j} = \dfrac{1}{2n}$ si $|i+j-(n+2)| = 1$

1. On pose $E = \left\{(i,j) \in \{1, 2, ..., n+1\}^2; \quad |i+j-2n| = 1\right\}$.
   Calculer $\operatorname{card} E$. En déduire la matrice A.

2. Donner les lois de probabilité de X et de Y.
   Etudier l'indépendance de X et de Y.

3. Déterminer la matrice B.
   Démontrer que le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$: $V = (P(X = 1), P(X = 2), .., P(X = n+1))$ est un vecteur propre de B, déterminer la valeur propre associée.

N.B. : les questions I - et II - du problème 2 sont indépendantes.