ICN 1982 Option générale

PROBLEME 1

On donne une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$f_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos nt}{1 - x\cos t}dt$$

$f_n(x)$ étant considérée comme intégrale d'une fonction définie et continue sur $[0, \pi]$

1. (a) Calculer $f_n(0)$.
   (b) Donner l'ensemble de définition D de f_n.
   (c) Indiquer si f_n est paire ou impaire.

2. On suppose dans cette question que n est strictement positif.

   (a) Démontrer que pour tout entier k strictement positif, il existe $k+1$ nombres réels $a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{k,k}$, tels que pour tout x réel :
   $$\cos^k x = \sum_{p=0}^{k} a_{p,k}\cos px$$
   Calculer $a_{k,k}$.
   En déduire pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ la valeur de l'intégrale :
   $$I_k = \int_0^\pi \cos kt \cos nt dt$$

   (b) Démontrer que pour x appartenant à D, il existe une fonction ε_x, que l'on déterminera, telle que pour $t \in [0, \pi]$:
   $$\frac{1}{1 - x\cos t} = 1 + x\cos t + \cdots + x^n\cos^n t + x^n\varepsilon_x(t)$$
   $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_x(t) = 0$.
   (c) Utiliser les résultats précédents pour donner le développement limité de f, en 0 à l'ordre n.

3. (a) Calculer $f_0(x)$ en effectuant soigneusement le changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$. Calculer $xf_1(x)$ en fonction de $f_0(x)$; en déduire $f_1(x)$.
   (b) Pour tout x appartenant à D exprimer $x\left(f_{n+2}(x) + f_n(x)\right)$ en fonction de $f_{n+1}(x)$

4. On prend $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

   (a) Montrer que $f_0(\sin\alpha) = \dfrac{\pi}{\cos\alpha}$
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :
   $$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{2}{\sin\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n(\sin\alpha) \\ f_{n+1}(\sin\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1}(\sin\alpha) \\ f_{n+2}(\sin\alpha) \end{pmatrix}$$

(c) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \dfrac{2}{\sin\alpha} \end{pmatrix}$.

En remarquant que $\begin{pmatrix} f_0(\sin\alpha) \\ crf_1(\sin\alpha) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A, calculer $f_n(\sin\alpha)$.

5. Calculer $f_n(x)$.

PROBLEME 2

On donne un entier n supérieur ou égal à 3. n personnes se répartissent au hasard dans les 3 pièces A_1, A_2 et A_3 d'un appartement, chaque pièce pouvant contenir un nombre quelconque de personnes allant de 0 jusqu'à n . On désigne par $X_1,\ X_2$ et X_3 les variables aléatoires prenant pour valeurs respectives le nombre de personnes situées dans les pièces A_1, A_2 et A_3.

1. (a) Donner les lois de probabilité de X_1, X_2, X_3 et $X_1 + X_2$.
   (b) Calculer la variance de $X_1 + X_2$; en déduire la covariance et le coefficient de correlation linéaire du couple (X_1, X_2).
2. (a) Donner la loi de probabilité conjointe du couple (X_i, X_j) pour $i \neq j$.
   (b) On désigne par Y_n la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de pièces occupées. Donner la loi de Y_n et son espérance mathématique.