ICN 1983

1er problème

Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on considère les fonctions f_n et g_n définies par

$$f_n(x) = \frac{n}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin nt}{1+(x-t)^2} dt \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{n}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\cos nt}{1+(x-t)^2} dt.$$

I -

1. a) Donner les ensembles de définition de f_n et g_n.

   b) Démontrer que que pour tout x réel : $f_n(x) \leqslant \dfrac{n}{2\pi} \displaystyle\int_{x-\frac{\pi}{n}}^{x} \dfrac{dt}{1+t^2}$.

   En déduire les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a) En écrivant $g_n(x) = \dfrac{n}{2\pi} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \dfrac{\cos nt}{1+(x-t)^2} dt + \dfrac{n}{2\pi} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{n}} \dfrac{\cos nt}{1+(x-t)^2} dt$, démontrer qu'il existe une fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$, de signe constant telle que pour x réel, $g_n(x) = (2x - \dfrac{n}{2\pi}) h_n(x)$.

   b) En déduire le signe de $g_n(x)$.

3. Effectuer le changement de variable $u = x - t$ dans $f_n(x)$ et dans $g_n(x)$.
   En déduire le calcul de la dérivée f_n' de f_n. Montrer que f_n' s'exprime simplement en fonction de g_n.

4. Etudier le sens de variation de f_n et construire sommairement sa représentation graphique.

II -

1. En reprenant le changement de variable $u = x - t$ dans $g_n(x)$, en déduire le calcul de la dérivée g_n' de g_n.
   Déterminer que pour tout x réel

$$f_n(x) = -\frac{1}{n} g_n'(x) + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-t}{n}\right)^2} \right]$$

2. a) Démontrer que pour tout x réel, $\left| \dfrac{g_n(x)}{n} \right| \leqslant \dfrac{1}{2n}$.

   b) En utilisant les résultats antérieurs, démontrer que les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt, \quad J_n = \int_{-\infty}^{0} f_n(t) dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$$

   sont convergentes, donner leurs valeurs en fonction de $g_n(0)$.

   c) Démontrer que f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X_n.

3. Soit F_n la fonction de répartition de la variable X_n.

   a) Déterminer $F_n(x)$.

   b) Démontrer que les variables aléatoires X_n convergent en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la densité de probabilité.

2ème problème

On donne un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension n, $n \geqslant 3$ et une base $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, .., \overrightarrow{e_n})$ de E. Pour $k = 1, 2, .., n$, on pose

$$\overrightarrow{f_k} = \left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e_i}\right) - \overrightarrow{e_k}$$

1- a. Calculer le déterminant D_n de la famille $B_1 = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, ..., \overrightarrow{f_n})$ dans la base B. En déduire que B_1 est une base de E puis donner la matrice de passage P de la base B à la base B_1.

b. Pour $k = 1, 2, ..., n$ déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{e_k}$ dans la base B_1. En déduire la matrice P^{-1}.

2- Soit u un endomorphisme de E admettant les vecteurs $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, ..., \overrightarrow{f_n}$ pour vecteurs propres avec des valeurs propres réelles respectives $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$.
On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des endomorphismes v de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

a. Soit $L = \{(i, j) \in \{1, 2, .., n\}^2 : \lambda_i = \lambda_j\}$.
Déterminer l'expression générale des matrices $V = (a_{i,j})$ des endomorphismes v de $\mathcal{H}$ exprimées dans la base B_1; on précisera $a_{i,j}$ suivant que (i, j) appartient ou non à L.

b. On prend dans cette question $n = 3$.
On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Démontrer que A est la matrice dans la base B d'un endomorphisme u admettant $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$, $\overrightarrow{f_3}$ pour vecteurs propres.
Utiliser les résultats précédents pour déterminer l'expression générale des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels qui commutent avec A.