ICN 1984 Option générale

EXERCICE 1

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x}+1)}$

1. Démontrer que les intégrales $I = \int\limits_0^1 f(x)dx$ et $J = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ existent.

2. Pour $x \geqslant 0$ on définit la fonction F par $F(x) = \int\limits_x^1 f(u)du$.

   - Effectuer le changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$ dans l'intégrale $F(x)$.
   - Calculer $F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$; en déduire l'existence et le calcul de l'intégrale $K = \int\limits_0^{+\infty} f(x)x$.

EXERCICE 2

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n où n est un entier supérieur ou égal à 2. On tire successivement et avec remise 2 jetons de l'urne, on désigne par X et Y les variables aléatoires qui à chaque tirage font correspondre respectivement le plus petit et le plus grand des 2 nombres obtenus.

1. Soit $(a,b) \in [\![1,n]\!]^2$. Calculer la probabilité $p(a,b)$ de l'événement $((X=a)\cap(Y=b))$.

2. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y.

3. On définit les matrices unicolonnes U et V par :

$$U = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} P(Y=1) \\ P(Y=2) \\ \vdots \\ P(Y=n) \end{pmatrix}$$

   Démontrer qu'il existe une matrice M indépendante de n, que l'on déterminera, telle que $V = M.U$.

PROBLEME

On désigne par $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et par I la matrice unité. On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie les conditions $\mathcal{C}$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $I \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 3.
- $\mathcal{F}$ est une partie stable de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ pour la multiplication des matrices.

PARTIE I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que les matrices A^2, B^2, $A.B$ et $B.A$ sont des combinaisons linéaires de I, A et B.
2. Démontrer que le sous-espace vectoriel engendré par I, A, et B vérifie les conditions $\mathcal{C}$.

PARTIE II

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ où x, y, z et t sont 4 nombres réels.

1. Démontrer que (I, J, K) est une famille libre si et seulement si $(x - t)^2 + (y + z)^2 \neq 0$.
2. On suppose que J appartient à une partie $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions $\mathcal{C}$.
   - Démontrer qu'il existe x, y, z et t, qu'on ne cherchera pas à calculer, tels que (I, J, K) soit une base de $\mathcal{F}$.
   - Démontrer alors que $(I, J, K, J.K)$ est une famille libre. Conclure.

PARTIE III

Soit une matrice U de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout nombre k réel, $U \neq kI$.

1. On suppose qu'il existe une partie $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions $\mathcal{C}$ et contenant U.
   (a) Démontrer qu'il existe une matrice V telle que (I, U, V) soit une base de $\mathcal{F}$; on ne cherchera pas à expliciter V.
   Démontrer qu'il existe 3 nombres réels α, β et γ tels que $U.V = \alpha I + \beta U + \lambda V$.
   Calculer $(U - \lambda I)(U.V - V.U)$
   (b) En admettant que $U.V \neq V.U$, démontrer que U possède une valeur propre réelle.
2. Réciproquement on suppose que U possède une valeur propre réelle.
   Démontrer qu'il existe une partie $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions $\mathcal{C}$ et contenant U.