ICN 1985 Option générale

EXERCICE 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} b+c & -b & -c \\ -a & a+c & -c \\ -a & -b & a+b \end{pmatrix}$ où a, b et c sont 3 nombres réels donnés.

1. On suppose que $a+b+c=0$.
   Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
2. On suppose que $a+b+c \neq 0$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de A.
   En déduire que A est semblable à une matrice diagonale D que l'on déterminera.
   (b) Démontrer qu'il existe un nombre réel α que l'on déterminera et une matrice B tels que $A = \alpha B$ et $B^2 = B$.

EXERCICE 2

On donne un entier n tel que $n \geqslant 2$.
On désigne par E_n l'ensemble des fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) = x^n f(y) + y^n f(x)$$

On désigne par T_n l'ensemble des fonctions t_α définies par

$$t_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x^n \ln|x| & \text{si} x \neq 0 \\ 0 & \text{si} x = 0 \end{cases}$$

α étant un paramètre réel quelconque.

1. Démontrer l'inclusion $T_n \subset E_n$.
2. Soit $f \in E_n$.
   (a) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.
   Etudier la parité de f.
   (b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad xf'(x) = x^n f'(1) + nf(x)$.
   f' désignant la dérivée de f.
   (c) Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^n}$.
   Calculer la dérivée de h.
   En déduire que $f \in T_n$.
   Conclure.

PROBLEME

On donne un nombre réel x et un entier n tels que $0 < x < 1$ et $n \geqslant 2$.
On estime que dans une population Ω la proportion d'individus connaissant la signification du sigle I.C.N. est x. On interroge n personnes de la population Ω en demandant à chacune d'elle de choisir entre 3 définitions différentes d_1, d_2 et d_3 du sigle I.C.N. celle qui lui parait la bonne ; d_1 étant la définition exacte ; on suppose que les personnes qui connaissent la définition du sigle I.C.N. choisissent nécessairement d_1.

PARTIE I

1. Pour $i = 1, 2, 3$ calculer en fonction de x la probabilité p_i qu'une personne interrogée choisisse la définition d_i.
2. Calculer la probabilité $q(x)$ qu'une personne ayant choisi la réponse d_1 connaisse la signification du sigle I.C.N.

PARTIE II

Pour $i = 1, 2, 3$ on désigne par X_i la variable aléatoire réelle prenant pour valeurs le nombre de réponses d_i choisies par les n personnes interrogées.

1. Donner la loi de probabilité de X_i. Calculer l'espérance mathématique m_i et l'écart-type σ_i de X_i.
2. Démontrer que pour $i = 2$ et 3, $\quad m_i < \dfrac{n}{3} < m_1$.

   Démontrer que $\sigma_i^2 \leqslant \dfrac{n}{4}$.

PARTIE III

On veut estimer la valeur de x ; pour cela on constitue 50 échantillons de 30 personnes chacun, les échantillons étant notés $e_1, e_2, \ldots, e_{50}$.
Pour $i = 1, 2, \ldots, 50$ on désigne par $(X_1)_i$ la variable aléatoire réelle prenant pour valeurs le nombre de personnes de l'échantillon e_i ayant choisi la réponse d_1.

On pose $Z = \dfrac{(X_1)_1 + (X_1)_2 + \cdots + (X_1)_{50}}{50}$

1. En supposant les variables $(X_1)_i$ indépendantes dans leur ensemble, calculer en fonction de m_1 et de σ_1^2, lorsque $n = 30$, l'espérance mathématique et la variance de Z.
2. Démontrer que : $\quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times, \quad (|Z_m - 1|) \geqslant \varepsilon \leqslant \dfrac{3}{20.\varepsilon^2}$.
3. On réalise les 50 échantillons et on note pour chacun d'eux le nombre de réponses d_1 obtenues. On obtient la série statistique suivante

nombre de réponses d_1	8	10	12	15	16	20
effectifs	5	10	8	15	10	2

   - Calculer la moyenne M de cette série statistique.
   - Justifier la raison pour laquelle M est une approximation possible de m_1.
   - Donner une estimation de x.

PARTIE IV

On revient aux conditions générales précédant la partie III ;
Pour $i = 1, 2, 3$ on pose $Y_i = \dfrac{X_i - m_i}{\sigma_i}$.
On pose aussi $T = (1 - p_1)Y_1^2 + (1 - p_2)Y_2^2 + (1 - p_3)Y_3^2$.

1. Calculer l'espérance mathématique de T.
2. (a) Déterminer $\sigma_1 Y_1 + \sigma_2 Y_2 + \sigma_3 Y_3$.

   (b) Démontrer que $(1 - p_3)Y_3^2 = \left(\sqrt{2p}\, Y_1 + \sqrt{\dfrac{1 + p_1}{2}}\, Y_2\right)^2$.

   (c) Démontrer qu'il existe deux variables aléatoires U et V centrées et réduites toutes deux, non corrélées (c'est-à-dire de covariance nulle) telles que $T = U^2 + V^2$.