IECS 1987 Option générale Maths I

EXERCICE I

$\mathbb{R}[x]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient u et v les applications de $\mathbb{R}[x]$ dans lui-même définies par

$$\forall P \in \mathbb{R}[x], \qquad \begin{array}{c} [u(P)](x) = xP(x) \\ [v(P)](x) = P'(x) \end{array} \qquad \text{où } P' \text{ note le polynôme dérivé de } P$$

1. Montrer que u et v sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}[x]$.

2. Déterminer $v \circ u - u \circ v$.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad v \circ u^n - u^n \circ v = nu^{n-1}$, où u^n note $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n termes) pour $n \geqslant 1$ et $u^0 = I$ (application identique)

EXERCICE II

n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1, on note, pour x réel > 0

$$P_n(x) = -1 + x + x^2 + \cdots + x^n = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

1. Montrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}_+^{\times}, \quad P_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n et que $0 < x_n \leqslant 1$.

2. Montrer, en considérant $P_{n+1}(x_n)$, que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge. Soit l sa limite.

3. (a) Prouver que : $\forall n \geqslant 2, \quad 0 < x_n < x_2 < 1$.
   En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)^{n+1} = 0$.

   (b) En trouvant une expression simplifiée de $P_n(x)$ sous forme d'un quotient, montrer que $l = \dfrac{1}{2}$.

4. (a) En posant $x_n = \dfrac{1}{2} + \varepsilon_n$, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\varepsilon_n = 0$

   (b) En déduire que, quand n tend vers $+\infty$, $(x_n - \dfrac{1}{2}) \sim \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$.

PROBLEME

N.B. : les parties **I** et **II** sont très largement indépendantes.
On note $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1}$ pour $x > 0$ et $x \neq 1$.

Partie I

1. Montrer que f peut-être prolongée par continuité au point 1. On notera φ le prolongement par continuité de f.

2. Montrer que φ est dérivable au point 1 et calculer $\varphi'(1)$.

3. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^{\times}$. φ' est-elle continue en 1 ?

4. (a) Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par $h(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \ln x$.

   (b) En déduire le signe de $\varphi'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ et dresser le tableau de variations de φ.

   (c) Tracer la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé (unités graphiques : 2 cm)

5. En utilisant les variations de φ, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \ln x \leqslant x - 1.$$

Partie II

1. (a) Montrer, par exemple à l'aide d'une dérivation, que

$$\forall h < 1, \quad \ln(1-h) = -\left(h + \frac{h^2}{2} + \cdots + \frac{h^n}{n}\right) - \int_0^h \frac{t^n}{1-t} dt \quad (n \in \mathbb{N}^\times)$$

   On notera $f_n(h) = \int_0^h \dfrac{t^n}{1-t} dt$. On suppose désormais $h \in]0,1[$.

   (b) Montrer que si $t \in [0,h]$, on a $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1-t} \leqslant \dfrac{h^n}{1-t}$ puis que

$$0 \leqslant f_n(h) \leqslant h^n \ln\left(\frac{1}{1-h}\right).$$

   (c) En déduire que $\dfrac{f_n(h)}{h}$ est intégrable sur $[0, \dfrac{1}{2}]$ pour $n \geqslant 1$ et que

$$0 \leqslant \int_0^{1/2} \frac{f_n(h)}{h} dh \leqslant \frac{\ln 2}{n 2^n}.$$

2. (a) Montrer que

$$\int_{1/2}^1 \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^n u_k + \int_0^{1/2} \frac{f_n(h)}{h} dh \quad \text{où } u_k = \frac{1}{2^k k^2}.$$

   (b) Montrer que la série de terme général u_k converge et en déduire de ce qui précède que sa somme vaut $\int_{1/2}^1 \varphi(x) dx$.

3. Montrer que

$$\sum_{k=10}^{+\infty} u_k < \frac{1}{2^9.10^2}$$

   En déduire une valeur approchée à 10^{-4} près de $\int_{1/2}^1 \varphi(x) dx$